TeSciA

2021

Mathématiques Expertes

Épreuve 2, Option A

Sujet zéro

Durée : 1h30

Code sujet : ◯ ◯ ●

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Calculs élémentaires sur les nombres complexes

☐ **M1** Le produit $(1+3i)(2-i)$ vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $-1+5i$ $\boxed{\text{B}}$ $-5-5i$ $\boxed{\text{C}}$ $1-5i$ $\boxed{\text{D}}$ $-5+5i$ ■ $5+5i$

☐ **M2** Le nombre complexe $4+3i$ a pour module :

$\boxed{\text{A}}$ -7 ■ 5 $\boxed{\text{C}}$ 7 $\boxed{\text{D}}$ 25 $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{7}$

☐ **M3** L'inverse du nombre complexe $2+3i$ est :

■ $\frac{2}{13}-\frac{3i}{13}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{2}{7}-\frac{3i}{7}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{2}+\frac{i}{3}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{2}-\frac{i}{3}$ $\boxed{\text{E}}$ $-2-3i$

☐ **M4** Le quotient $\frac{1-3i}{3-i}$ vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{3+4i}{5}$ ■ $\frac{3-4i}{5}$ $\boxed{\text{C}}$ $-\frac{3+4i}{5}$ $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{3-4i}{5}$ $\boxed{\text{E}}$ $\frac{-3+4i}{5}$

☐ **M5** L'équation $z^2+6=-2z$ possède pour solutions complexes :

■ $-1+i\sqrt{5}$ et $-1-i\sqrt{5}$

$\boxed{\text{B}}$ $2+2i\sqrt{5}$ et $-2+2i\sqrt{5}$

$\boxed{\text{C}}$ $1+i\sqrt{5}$ et $1-i\sqrt{5}$

$\boxed{\text{D}}$ $2\sqrt{5}+2i$ et $2\sqrt{5}-2i$

$\boxed{\text{E}}$ $2+2i\sqrt{5}$ et $2-2i\sqrt{5}$

☐ **M6** Le nombre complexe i est la seule solution complexe de l'équation $z^2=-1$.

■ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M7** Le module et un argument de $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ sont respectivement :

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$ ■ $\sqrt{2}$ et $-\frac{\pi}{6}$ $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{2}$ et $\frac{\pi}{6}$ $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{2}$ et $-\frac{5\pi}{6}$ $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$

Exercice 2. Arithmétique élémentaire

On appellera plus simplement « entiers » les entiers relatifs. Ainsi, -1 est un entier mais pas un entier naturel.

☐ **M8** Le nombre 1 est premier.

■ Faux B Vrai

☐ **M9** Le nombre 91 est premier.

■ Faux B Vrai

☐ **M10** Un entier est premier si et seulement si le nombre de ses diviseurs entiers vaut :

A 8 B 2 C 1 ■ 4 E 0

☐ **M11** Le nombre 110 est premier avec :

A 45 ■ 21 C 10 D 33 E 14

☐ **M12** Le nombre de diviseurs entiers naturels de 115 est :

■ 4 B 2 C 8 D 6 E 10

△ **L1** Donner sans justification le pgcd de 1636 et 1227.

☐ **M13** Le nombre 7^{12} est congru modulo 13 à

A -1 ■ 1 C -2 D 0 E 2

☐ **M14** Le nombre 11^{46} est congru modulo 23 à

A 4 B 0 C 2 D 8 ■ 6

☐ **M15** Le reste dans la division euclidienne de 4^{19} par 9 vaut :

A 1 B 2 C -1 ■ 4 E 7

Exercice 3. Mots

Définitions, exemples

On appelle **mot fini** une suite finie (non vide) de 0 et de 1. Par exemple, 0011010 est un mot fini. Le nombre de chiffres du mot est appelé longueur du mot. Par exemple, la longueur du mot 0011010 est 7.

On appelle **mot infini** une suite infinie de 0 et de 1 (c'est-à-dire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \in \{0,1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). On représentera un mot en « collant » les chiffres de la suite. Par exemple, le mot w défini par $w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ peut être représenté par

$$w = 0000000000\cdots$$

Si u est un mot (fini ou infini), on appelle **sous-mot fini** de u tout mot fini constitué de chiffres consécutifs dans u. L'ensemble des sous-mots de u est noté $S(u)$.

Par exemple :

- Le mot 110 est un sous-mot fini (de longueur 3) de 0011010.
- Le mot 111 n'est pas un sous-mot fini de 0011010.
- Les sous-mots finis de longueur 3 de 011011011 sont 011, 110 et 101.
- Le mot 00000 est un sous-mot fini de longueur 5 du mot infini w défini précédemment.
- On a $S(w) = \{0, 00, 000, \cdots\}$.
- Les mots 1 et 01 ne sont pas des sous-mots finis de w.

Vrai ou Faux

Dans les questions de cette partie, on demande d'évaluer la validité logique des propositions indiquées.

☐ **M16** Le mot 0101 est un sous-mot fini de 010010011.

■ Faux B Vrai

☐ **M17** Le mot infini w (défini dans le préambule de l'exercice) a un seul sous-mot de longueur 4.

A Faux ■ Vrai

☐ **M18** Il existe (au moins) un mot fini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 10.

A Faux ■ Vrai

☐ **M19** Il existe (au moins) un mot infini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 10.

[A] Faux ■ Vrai

☐ **M20** Il existe (au moins) un mot fini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 11.

[A] Vrai ■ Faux

☐ **M21** Il existe (au moins) un mot infini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 11.

■ Faux [B] Vrai

☐ **M22** Il existe (au moins) un mot fini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 01.

[A] Faux ■ Vrai

☐ **M23** Il existe (au moins) un mot infini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 01.

[A] Vrai ■ Faux

Ensemble des sous-mots

☐ **M24** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

[A] L'ensemble $S(u)$ peut être fini même si u est infini.
[B] L'ensemble $S(u)$ est toujours fini.
[C] Aucune des autres affirmations n'est vraie
[D] L'ensemble $S(u)$ est toujours infini.
■ L'ensemble $S(u)$ est toujours infini si u est infini, toujours fini si u est fini.

☐ **M25** Deux mots u et v étant donnés, l'hypothèse minimale, parmi les suivantes, pour pouvoir obtenir l'égalité $u = v$ est :

■ $S(u) = S(v)$ et u et v sont finis
[B] $S(u) = S(v)$ et u et v sont finis de même longueur
[C] $S(u) = S(v)$, u et v sont finis de même longueur et ont le même premier chiffre et le même dernier chiffre
[D] $S(u) = S(v)$
[E] $S(u) = S(v)$, u et v sont finis de même longueur et ont le même premier chiffre

☐ **M26** Il existe (au moins) un mot infini u tel que $S(u)$ contienne tous les mots finis possibles.

■ Vrai [B] Faux

◯ **R1** Justifier votre réponse à la question **M26**.

Mots périodiques

On dit qu'un mot infini $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **périodique** s'il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$u_n = u_{n+d} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Cela signifie que le mot u est obtenu en répétant un mot de longueur d. Par exemple, le mot

$$z = 011011011011011011011\cdots$$

est périodique avec $d = 3$ (ou encore $d = 6$), obtenu en répétant le mot fini 011 (ou le mot fini 011011).

Dans les questions suivantes, on demande d'évaluer la véracité des propositions indiquées.

☐ **M27** Toutes les mots infinis sont périodiques.

■ Faux [B] Vrai

☐ **M28** L'ensemble des mots périodiques est infini.

■ Vrai [B] Faux

☐ **M29** Si u est un mot périodique obtenu en répétant un mot fini v, alors $S(u) = S(v)$.

[A] Vrai ■ Faux

Étant donné un mot u et un entier k, l'ensemble des sous-mots de longueur k de u est noté $S_k(u)$, et le nombre de sous-mots de longueur k de u est noté $P_k(u)$. Par exemple, pour $u = 0111011$, on a $S_3(u) = \{011, 111, 110, 101\}$ et $P_3(u) = 4$.

☐ **M30** Si u est un mot périodique obtenu en répétant un mot fini v de longueur d, alors $S_i(u) = S_i(v)$ pour tout entier i compris entre 1 et d.

[A] Vrai ■ Faux

☐ **M31** Si u est un mot périodique obtenu en répétant un mot fini v de longueur d, alors $P_i(u) \leq d$ pour tout entier $i > 0$.

[A] Faux ■ Vrai

◯ **R2** Justifier brièvement votre réponse à la question **M31**.

Transformation de mots (début)

Étant donné deux mots finis a et b, on appelle transformation de mots associée à a et b le processus qui transforme les mots en remplaçant les 0 par le mot a et les 1 par le mot b. Le résultat obtenu pour un mot u est noté $f_{a,b}(u)$. Par exemple, si $a = 00$ et $b = 101$, alors : $f_{a,b}(0) = 00$, $f_{a,b}(01) = 00101$, $f_{a,b}(0110) = 0010110100$, $f_{a,b}(100) = 1010000$, $f_{a,b}(001111111\cdots) = 000010110110110110110110110 1\cdots$

Dans les questions de cette partie, on donne des égalités et on demande de dire s'il existe des mots a et b satisfaisant simultanément à toutes celles qui sont indiquées.

☐ **M32** $f_{a,b}(0) = 11$ et $f_{a,b}(1001) = 10111110$

☐A Non ■ Oui

☐ **M33** $f_{a,b}(0) = 01$ et $f_{a,b}(110) = 001$

■ Non ☐B Oui

☐ **M34** $f_{a,b}(0101) = 11011101$ et $f_{a,b}(11) = 00$

■ Non ☐B Oui

☐ **M35** $f_{a,b}(000) = 101010$ et $f_{a,b}(10) = 110$

■ Oui ☐B Non

☐ **M36** $f_{a,b}(001) = 00000$ et $f_{a,b}(101) = 0000$

☐A Non ■ Oui

☐ **M37** $f_{a,b}(0011) = 1010101010$

☐A Oui ■ Non

☐ **M38** $f_{a,b}(001) = 111111$ et $f_{a,b}(101) = 1111$

■ Non ☐B Oui

☐ **M39** $f_{a,b}(010101010101\cdots) = 1010101010\cdots$ et $f_{a,b}(10) = 010101$

☐A Non ■ Oui

☐ **M40** $f_{a,b}(011011011011011\cdots) = 1010101010\cdots$

■ Oui ☐B Non

☐ **M41** $f_{a,b}(011011011011011\cdots) = 1100110011001100\cdots$

[A] Non ■ Oui

Transformation de mots (fin)

☐ **M42** La propriété « Pour n'importe quel mot périodique u, le mot $f_{a,b}(u)$ est périodique » est vraie :

[A] pour aucun choix des mots finis a et b

■ pour tous mots finis a et b

[C] pour certains mots finis a et b mais pas tous

◯ **R3** Soit a un mot fini de longueur au moins 2 et commençant par 0. Justifier qu'il existe un mot infini u tel que $f_{a,b}(u) = u$.

Exercice 4. Nombres parfaits

Un entier naturel $n \geq 2$ est dit **parfait** lorsqu'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs stricts (c'est-à-dire tous ses diviseurs positifs sauf n lui-même). Par ailleurs, on notera $\sigma(n)$ la somme de tous les diviseurs positifs de n, par exemple $\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$ et $\sigma(9) = 1 + 3 + 9 = 13$. Ainsi, ni 4 ni 9 n'est parfait. En revanche 6 est parfait car $6 = 1 + 2 + 3$.

☐ **M43** $\sigma(10)$ vaut :

[A] 9 [B] 10 [C] 17 ■ 18 [E] 8

☐ **M44** $\sigma(30)$ vaut :

[A] 90 ■ 72 [C] 42 [D] 50 [E] 44

☐ **M45** Un nombre premier peut-il être parfait ?

[A] Seul le nombre 1 est à la fois premier et parfait

[B] Oui, tous

■ Non, aucun

[D] Certains le sont et d'autres non

△ **L2** En cas de réponse "Certains le sont et d'autres non" à la question **M45**, citer un nombre premier parfait et un nombre premier non parfait.

☐ **M46** Soit p un nombre premier et k un entier naturel non nul. Alors $\sigma(p^k)$ vaut :

[A] $\frac{k(k+1)p}{2}$ [B] $1 + (k-1)p$ [C] $1 + kp$ ■ $\frac{p^{k+1}-1}{p-1}$ [E] $\frac{p^k-1}{p-1}$

☐ **M47** Le nombre n (entier naturel) est parfait si et seulement si $\sigma(n)$ vaut :

[A] $n+1$ ■ $2n$ [C] n [D] n^2 [E] $n-1$

☐ **M48** L'ensemble des nombres parfaits de la forme p^k avec p premier et $k \geq 1$ est :

[A] fini et possède plusieurs éléments

[B] réduit à un élément

■ vide

[D] infini

Multiplicativité de la fonction σ

Dans cette partie, on admet le résultat suivant : quels que soient les entiers naturels $a \geq 1$ et $b \geq 1$ premiers entre eux, on a $\sigma(ab) = \sigma(a)\,\sigma(b)$.

△ **L3** Donner la valeur de $\sigma(144)$ et celle de $\sigma(105)$.

☐ **M49** L'affirmation : « pour tous a et b entiers naturels non nuls, $\sigma(ab) = \sigma(a)\,\sigma(b)$ » est :

■ Fausse [B] Vraie

△ **L4** En cas de réponse « Fausse » à la question **M49**, expliciter un couple (a, b) d'entiers naturels non nuls tel que $\sigma(ab) = \sigma(a)\,\sigma(b)$, et expliciter sans calcul les valeurs respectives de $\sigma(ab)$ et $\sigma(a)\,\sigma(b)$.

☐ **M50** Soit un entier $m \geq 1$. Laquelle des affirmations suivantes est systématiquement vraie ?

■ Si $2^{m+1} - 1$ est premier, alors $2^m(2^{m+1} - 1)$ est parfait

[B] Si $2^m - 1$ est premier, alors $2^m(2^m - 1)$ est parfait

[C] Si $2^m - 1$ est premier, alors $2^{m+1}(2^m - 1)$ est parfait

[D] Aucune

☐ **M51** Soit $m \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier. Alors :

[A] Si $2^m p$ n'est pas parfait alors p est pair.

[B] Il se peut qu'aucune des quatre autres propositions ne soit vraie.

[C] Si $2^m p$ n'est pas parfait alors p est impair.

[D] Le nombre $2^m p$ peut être parfait sans que p soit impair.

■ Si $2^m p$ est parfait alors p est impair.

☐ **M52** Soit $m \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier. On suppose que $2^m p$ est parfait. Alors :

[A] $p = 2^m - 1$

[B] $p = 2^{m+1} + 1$

■ $p = 2^{m+1} - 1$

[D] $p = 2^{m-1} - 1$

[E] Il se peut qu'aucune des quatre autres propositions ne soit vraie.

△ **R4** En supposant connus les nombres premiers de Mersenne, c'est-à-dire les nombres premiers de la forme $2^a - 1$, déterminer les nombres parfaits de la forme $2^m p^n$ avec m, n entiers naturels et p premier impair. On attend un raisonnement entièrement détaillé mais on pourra s'appuyer sur des résultats déjà obtenus dans les questions précédentes.

Exercice 5. Calculs symboliques sur les nombres complexes

☐ **M53** Pour tout nombre réel a, un argument du nombre complexe $\sin(a) - i\cos(a)$ est :

■ $a - \frac{\pi}{2}$ [B] $-a + \frac{\pi}{2}$ [C] $a + \frac{\pi}{2}$ [D] $a + \pi$ [E] $-a - \pi$

☐ **M54** Soit $z \in \mathbb{C}$. Le module de $z - i$ est toujours égal à :

[A] $1 + |z|$ [B] $|z - 1|$ [C] $|1 - iz|$ ■ $|1 + iz|$ [E] $|z + 1|$

☐ **M55** Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul, avec r réel strictement positif et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout choix de $r > 0$ et de θ, le module et un argument de $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ sont, respectivement :

[A] $\frac{\sqrt{2}}{r}$ et $\frac{2\pi}{3} - \theta$ [B] $\frac{2}{r}$ et $\frac{4\pi}{3} - \theta$ ■ $\frac{2}{r}$ et $\frac{4\pi}{3} + \theta$ [D] $-\frac{2}{r}$ et $\frac{\pi}{3} - \theta$ [E] $\frac{2}{r}$ et $\frac{\pi}{3} + \theta$

☐ **M56** Soit a un nombre strictement compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π. Le module et un argument de $\dfrac{1}{1 + i\frac{\sin a}{\cos a}}$ sont toujours égaux respectivement à :

[A] $\cos a$ et a

■ $-\cos a$ et $\pi - a$

[C] $|\cos a|$ et a

[D] $-\cos a$ et $\pi + a$

[E] $|\cos a|$ et $\pi + a$

☐ **M57** Soit θ un nombre réel de l'intervalle $] - \pi, +\pi[$. On pose $x = -\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}\cdot$ Pour tout choix de θ, le nombre $e^{i\theta}$ vaut :

■ $\frac{1 - ix}{1 + ix}$ [B] $\frac{1 + ix}{1 - ix}$ [C] $\frac{-1 + ix}{1 + ix}$ [D] $\frac{1 - ix}{-1 + ix}$ [E] $\frac{1 + ix}{-1 + ix}$

☐ **M58** Pour n'importe quel nombre réel θ, le produit $(\cos\theta)(\cos 2\theta)$ vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $2\cos(\theta) - \cos(3\theta)$

$\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\cos(\theta)}{2} - \dfrac{\cos(3\theta)}{2}$

■ $\dfrac{\cos(\theta)}{2} + \dfrac{\cos(3\theta)}{2}$

$\boxed{\text{D}}$ $\cos(\theta) + \cos(3\theta)$

$\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{3\cos(\theta)}{2} - \dfrac{\cos(3\theta)}{2}$

☐ **M59** Pour n'importe quel nombre réel θ, le produit $(\cos\theta)(\cos 2\theta)(\cos 3\theta)$ vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{-1 + 2\cos(2\theta) + 2\cos(4\theta) - \cos(6\theta)}{2}$

$\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{-1 + 2\cos(2\theta) - \cos(4\theta) + 2\cos(6\theta)}{2}$

$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{-1 + 2\cos(2\theta) + 2\cos(4\theta) - \cos(6\theta)}{2}$

$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{2 - \cos 2\theta - \cos(4\theta) + 2\cos(6\theta)}{2}$

■ $\dfrac{1 + \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(6\theta)}{4}$

△ **L5** Donner une expression simple des solutions de l'équation $z^4 = 1 - i$, en entourant la seule d'entre elles qui est à la fois de partie réelle et de partie imaginaire positives.

Exercice 6. Équations à inconnue complexe

$\triangle$ **L6** Rappeler sans démonstration les solutions complexes de l'équation $z = \overline{z}$.

$\triangle$ **L7** On fixe un nombre réel θ ; expliciter sous la forme la plus appropriée possible les solutions de l'équation $z = e^{i\theta}\overline{z}$. Aucune démonstration n'est attendue.

☐ **M60** On considère les fonctions polynômes complexes suivantes :

$$E : z \mapsto z^2 + z + 1 \quad ; \quad F : z \mapsto -z^2 + 2z + 1 \quad ; \quad G : z \mapsto -2z^2 + z - 2 \quad ; \quad H : z \mapsto z^3 - i.$$

Lesquelles ne s'annulent qu'en des nombres complexes de module un ?

- [A] Toutes
- [B] E et G
- [C] E, F et G
- [D] E, F et H
- ■ E, G et H

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geq 1$. Soit z un nombre complexe tel que $z^n = \overline{z}$. Le raisonnement suivant prétend démontrer que z est nécessairement de module 1, mais il est possible qu'il contienne une ou plusieurs erreurs.

- Étape 1 : on déduit de l'hypothèse $z^n = \overline{z}$ que $|z|^n = |z|$.
- Étape 2 : ainsi $|z|^{n-1} = 1$.
- Étape 3 : on en déduit que $|z| = 1$.

☐ **M61** L'étape 1 est :

- [A] valide si z est imaginaire pur, mais peut être invalide sinon
- [B] valide si $z \neq 0$, mais peut être invalide sinon
- [C] valide si z est réel, mais peut être invalide sinon
- [D] valide si $z \neq 1$, mais peut être invalide sinon
- ■ toujours valide

☐ **M62** L'étape 2 est :

- [A] valide si $z \neq 1$ et $n \neq 1$, mais peut être invalide sinon
- [B] valide si $n \neq 1$, mais peut être invalide sinon
- [C] toujours valide
- ■ valide si $z \neq 0$, mais peut être invalide sinon
- [E] valide si $z \neq 0$ et $n \neq 1$, mais peut être invalide sinon

☐ **M63** L'étape 3 est :

[A] valide si $z \neq 0$, mais peut être invalide sinon

[B] valide si $z \neq 1$ et $n \neq 1$, mais peut être invalide sinon

[C] toujours valide

[D] valide si $z \neq 0$ et $n \neq 1$, mais peut être invalide sinon

■ valide si $n \neq 1$, mais peut être invalide sinon

On suppose maintenant $n \geq 2$.

☐ **M64** L'équation $z^n = \overline{z}$ possède :

■ Exactement $n+2$ solutions

[B] Exactement n solutions

[C] Exactement $n-1$ solutions

[D] Exactement $n+1$ solutions

[E] Aucune des quatre autres solutions proposées n'est juste en toute généralité

△ **L8** Expliciter sans démonstration les solutions de $z^n = \overline{z}$. On pourra utiliser la notation $\mathbb{U}_d$ pour désigner l'ensemble des racines d-ièmes de l'unité.

☐ **M65** On *admet* qu'étant donné un entier $d \geq 1$ et des nombres complexes $a_0, a_1, \ldots, a_d$ avec $a_d \neq 0$, l'équation $a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ d'inconnue complexe z possède au plus d solutions. On fixe deux nombres complexes a et b. Sachant cela, l'équation $z^2 = a\overline{z} + b$ possède :

[A] au plus une solution, et dans certains cas exactement une

[B] au plus deux solutions, et dans certains cas exactement deux

[C] au plus trois solutions, et dans certains cas exactement trois

[D] au plus huit solutions, et dans certains cas exactement huit

■ au plus quatre solutions, et dans certains cas exactement quatre

◯ **R5** Justifier de manière très détaillée votre réponse à la question **M65**.