Nom et Prénom :

Code Sujet : ○ ○ ○

A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N	P	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

○ TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 2, Option A ○

R1 Pour tout entier $n \geq 1$ il y a un nombre fini de mots de longueur n.
On écrit tous les mots de longueur 1 puis tous les mots de longueur 2 (dans un ordre arbitraire) puis tous les mots de longueur 3 etc.
On colle tous ces mots pour obtenir un mot de longueur infini, noté u. Alors $S(u)$ contient tous les mots finis.
Par exemple $u = \underline{0}\ \underline{1}\ \underline{00}\ \underline{01}\ \underline{10}\ \underline{11}\ \underline{000}\ \underline{001}\ \underline{010}\ \underline{011}\ \underline{100}$ etc - -

R2 On suppose u d-périodique. Soit w un sous-mot de u, de longueur i.
$w = u_k u_{k+1} \cdots u_{k+i-1}$ pour un $k \in \mathbb{N}$.
On divise $k = qd + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$.
Comme u est d-périodique il vient $w = u_r u_{r+1} \cdots u_{r+i-1}$.
Ainsi, w prend au plus d valeurs (au plus le nombre de r possibles)
Conclusion : $P_i(u) \leq d$.

R3 Par hypothèse $f_{a,b}(0) = a = 0v^{(0)}$ pour un mot $v^{(0)}$ fini.

On prolonge $v^{(0)}$ en une suite de mots finis en posant
$v^{(n+1)} = f_{a,b}(v^{(n)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère le mot infini $u = 0 v^{(0)} v^{(1)} \ldots v^{(n)} \ldots$

Alors $f_{a,b}(u) = f_{a,b}(0) f_{a,b}(v^{(0)}) f_{a,b}(v^{(1)}) \ldots f_{a,b}(v^{(n)}) \ldots$
$= 0 v^{(0)} v^{(1)} v^{(2)} \ldots v^{(n+1)} \ldots = u$

R5 D'abord, d'après L9 l'équation $z^2 = \bar{z}$ possède exactement 4 solutions complexes.

Reprenons le cas général. Soit z dans $\mathbb{C}$ tel que $z^2 = a\bar{z} + b$.
En conjuguant, il vient $(\bar{z})^2 = \bar{a} z + b$.

Ainsi $z^4 = a^2(\bar{z})^2 + 2ab\bar{z} + b^2 = a^2(\bar{a}z + b) + 2b(z^2 - b) + b^2$

Donc $z^4 - 2bz^2 + a^2\bar{a}z + a^2 b - b^2 = 0$. (E)

Le résultat admis (cas $d = 4$) montre que (E) a au plus 4 solutions

Ainsi, $z^2 = a\bar{z} + b$ a au plus quatre solutions
(et exactement quatre si $a = 1$ et $b = 0$).