○ TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 1 ○

R1 On suppose que $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$ et $\vec{v} \perp (\vec{u} - \vec{w})$.

Donc $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$ et $\vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{w}) = 0$.

En développant, on trouve $\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

Donc $\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v}$, puis $\vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$

Ainsi $\vec{w} \perp (\vec{u} - \vec{v})$.

R2 Remarquons d'abord que $\boxed{f(x) \in [-1, 1] \text{ pour tout réel } x}$.

Soit en effet un réel x. Comme $e^x \geq 0$, $-e^x - 1 \leq e^x - 1 \leq e^x + 1$

donc $-1 \leq f(x) \leq 1$ en divisant par $e^x + 1$ (qui est strictement positif).

Comme vu en L7, $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - f(x)^2)$ pour tout réel x.

Posons donc $\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \frac{1-y^2}{2} \end{cases}$ et $\varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \begin{cases} \frac{1-y^2}{2} & \text{si } |y| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$

La première remarque assure que $f'(x) = \varphi_1(f(x)) = \varphi_2(f(x))$ pour tout réel x.

Or $\varphi_1 \neq \varphi_2$ car $\varphi_1(2) \neq 0$. Ainsi, il n'y a pas une seule fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = \varphi(f(x))$ pour tout réel x.

R3

Notons t l'abscisse de M. Ainsi H a pour coordonnées $(t, 0)$.

La tangente (T) à $\mathcal{C}$ en M a pour équation $y - e^{at} = a e^{at}(x - t)$

car la dérivée de $x \longmapsto e^{ax}$ est $x \longmapsto a e^{ax}$.

Ainsi $y_T - e^{at} = a e^{at}(x_T - t)$, i.e. $-e^{at} = a e^{at}(x_T - x_H)$

et ainsi $x_T - x_H = -\frac{1}{a}$ car $a \neq 0$. Puisque $y_T = y_H = 0$, il vient

$\boxed{TH = \frac{1}{|a|}}$, distance indépendante du choix de M sur $\mathcal{C}$.