Nom et Prénom :

Code Sujet : ○ ○ ○

A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N	P	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

△ TeSciA Feuille-Réponse Épreuve 2, Option B △

R5 On fixe $(u_n)_n$ comme au début. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a $0 \leq \frac{x}{2^k} \leq \frac{\pi}{2^{k+1}} \leq \frac{\pi}{4}$ donc $\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) > 0$ et $\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) \geqslant -\frac{x^2}{2 \cdot 4^k \cos\frac{x}{2^k}}$.

De plus $\cos\frac{x}{2^k} \geq \cos x$ (décroissance de cos sur $[0, \pi]$).

Ainsi $\ln(u_n) = \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right) + \dots + \ln\left(\cos\frac{x}{2^n}\right) \geqslant \underbrace{-\frac{x^2}{2\cos(x)}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}\right)}_{v_n}$

puis $u_n \geqslant e^{v_n}$ (croissance de exp)

Or $v_n = -\frac{x^2}{2\cos(x)} \cdot \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \times \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = -\frac{x^2}{6\cos(x)}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\frac{x^2}{6\cos(x)}$

Par continuité de exp il vient $c(x) \geqslant \exp\left(-\frac{x^2}{6\cos(x)}\right)$ en passant à la limite.

Par suite $c(x) > 0$.

R6 Soit $x \in]2n\pi, 2n\pi + \pi[$. Alors $n\pi < \frac{x}{2} < n\pi + \frac{\pi}{2}$. Par hypothèse $\begin{cases} c\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ c\left(\frac{x}{2}\right) < 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Or $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ si n est pair, $\cos\left(\frac{x}{2}\right) < 0$ sinon. Dans tous les cas $c(x) = c\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$.

- Soit $x \in]2n\pi ~~+\pi~~, 2n\pi + 2\pi[$. Alors $n\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < n\pi + \pi$, donc $\cos\left(\frac{x}{2}\right) < 0$ si n est pair, $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ sinon.

Comme précédemment, on en déduit que $c(x) < 0$.

- Pour tout x dans $]0, \pi[$, $c\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ par R5, et $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$, donc $c(x) > 0$

Pour tout x dans $]\pi, 2\pi[$, $c\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ car $0 < \frac{x}{2} < \pi$, et $\cos\frac{x}{2} < 0$, donc $c(x) < 0$.

- Par récurrence, il vient $(-1)^n c(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x dans $]n\pi, (n+1)\pi[$
- Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on écrit $k = 2^p q$ où $p \in \mathbb{N}$ et q est impair, et alors $\cos\left(\frac{k}{2^{p+1}}\right) = 0$ d'où $c(k) = 0$. Enfin $c(0) = 1$. Puisque c est paire on peut conclure :

si $x > 0$ alors $(-1)^{E(x/\pi)} c(x) > 0$ si $x \notin \mathbb{N}^*$; $c(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}^*$; sinon $(-1)^{E(x/\pi)} c(x) < 0$ si $x < 0$ et $x \notin \mathbb{Z}$

L1 $D_g = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$; $D_h = [0 ; 9]$	**L2** $a = \frac{49}{16}$
L3	**L4**
L5 Pour $A(a, b, c)$ $M_n((n-1)a, (n-1)b, \frac{(n-1)(n-2)}{2}ab + (n-1)c)$	**L6** Pour $A(a, b, c)$ $N_n(2^{n-1}a, 2^{n-1}b, 2^{n-2}(2^{n-1}-1)ab + 2^{n-1}c)$
L7 La dérivée de ln est $x \longmapsto \frac{1}{x}$, elle est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$	**L8** c'est la tangente au graphe de ln au point $(1 ; 0)$.