



Nom et Prénom :

Code Sujet : ○ ○ ○

A B C D E F G H I J K L M N P R S T U V W X Y Z 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

○ TESCIA FEUILLE-RÉPONSE ÉPREUVE 2, OPTION A ○

R1 On a vu en M12 que $10^{3n} \equiv 1 [37]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $10^{3n+1} \equiv 10 [37]$ et $10^{3n+2} \equiv 10^2 [37]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or $10 = 3 \times 3 + 1$, $20 = 3 \times 6 + 2$ et $30 = 3 \times 10$. Ainsi $10^{10} \equiv 10 [37]$, $10^{20} \equiv 10^2 [37]$ et $10^{30} \equiv 1 [37]$.

Ainsi $10^{10} + 10^{20} + 10^{30} \equiv 111 [37]$. Comme 37 divise 111 ($111 = 3 \times 37$), on conclut que 37 divise $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$.

R2 Il n'existe pas de plus grand nombre premier.

Supposons en effet qu'il en existe un, noté n . Alors $n! + 1 \geq 2$, donc $n! + 1$ possède un diviseur premier p . Alors $1 \leq p \leq n$.

Donc p divise $1 \times 2 \times \dots \times n = n!$, donc il divise $(n! + 1) - n! = 1$. C'est absurde. Le résultat en cadre est donc établi.

R3 Pour des mots quelconques v_1 et v_2 , on a clairement: $\overline{v_1 - v_2} = \overline{v_1} - \overline{v_2}$,

$$\widehat{\overline{v_1}} = v_1 \text{ et } \widehat{\overline{v_2}} = \widehat{\overline{v_1}} \text{ et } \overline{\widehat{v_1}} = v_1$$

• Supposons qu'il existe un mot v tel que $u = \overline{v} - \widehat{v}$.

Alors $\overline{u} = \overline{\overline{v} - \widehat{v}} = \overline{\overline{v}} - \overline{\widehat{v}} = \widehat{\overline{v}} - \widehat{\widehat{v}} = \widehat{\overline{v}} - v$, donc $\overline{u} = \widehat{v}$. Ainsi, u est un antimot.

• Réciproquement, supposons que u est un antimot. Notons sa longueur (paire) $2n$. On décompose $u = \overline{v} - \widehat{v}$ où v et \widehat{v} sont deux mots de longueur n .

Alors $\overline{u} = \overline{\overline{v} - \widehat{v}}$ et $\widehat{u} = \widehat{\overline{v} - \widehat{v}}$. En extrayant les n premiers chiffres, il vient $\overline{v} = \widehat{\widehat{v}}$, donc $v = \widehat{\overline{v}} = \widehat{\widehat{v}}$ puis $u = \overline{v} - \widehat{v}$.