TeSciA

2022

Mathématiques Générales

Épreuve 1

19 mars 2022

14h-15h30 heure de Paris

Code sujet : ◯ ◯ ●

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$ pour tout entier naturel n. On pose $a_n = u_n - 3$ lorsque n est un entier naturel.

☐ **M1** La valeur de u_2 est :

A $\dfrac{37}{3}$ ■ $\dfrac{25}{9}$ C $\dfrac{25}{3}$ D $\dfrac{37}{9}$ E $\dfrac{10}{3}$

☐ **M2** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

■ n'est ni arithmétique, ni géométrique B est arithmétique C est géométrique

☐ **M3** La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

A est arithmétique ■ est géométrique C n'est ni arithmétique, ni géométrique

☐ **M4** La raison de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

■ $\dfrac{1}{3}$ B 2 C $-\dfrac{2}{3}$ D Cette suite ne possède pas de raison E 3

☐ **M5** Pour tout entier naturel n, le terme a_n vaut :

■ $-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ B $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ C $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ D $-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ E $-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

☐ **M6**
Pour tout entier naturel n, le terme u_n vaut :

A $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} + 3$

B $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} - 3$

C $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+2} + 3$

D $-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+2} - 3$

■ $-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} + 3$

◯ **R1** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en justifiant votre réponse.

Exercice 2. Identités algébriques

☐ **M7** Étant donné un réel x différent de -2, la quantité $\frac{2}{x+2} - 1$ est systématiquement égale à :

[A] $\frac{1}{x+2}$ [B] $\frac{-x+4}{x+2}$ [C] $\frac{1-x}{x}$ ■ $\frac{-x}{x+2}$ [E] aucune des autres réponses

☐ **M8** Étant donné un réel x différent de 1 et -1, la quantité $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$ est systématiquement égale à :

[A] aucune des autres réponses ■ $\frac{2}{(x+1)(1-x)}$ [C] $\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$ [D] $\frac{1}{2}$ [E] 1

☐ **M9** Étant donné un réel x différent de 1 et -1, la quantité $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1}$ est systématiquement égale à :

[A] $\frac{x-1}{x}$ [B] $\frac{x-1}{x+1}$ [C] $\frac{x+2}{x-1}$ [D] $\frac{x-2}{x-1}$ ■ aucune des autres réponses

☐ **M10** Étant donné deux réels non nuls a et b, la quantité $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ est systématiquement égale à :

[A] aucune des autres réponses [B] $\frac{2ab}{a+b}$ [C] $\frac{ab}{a+b}$ ■ $\frac{a^2+b^2}{ab}$ [E] $\frac{a+b}{ab}$

☐ **M11** Étant donné deux réels non nuls a et b, la quantité $\left(\frac{b+\frac{1}{a}}{b}\right) a$ est systématiquement égale à :

[A] $b + \frac{1}{b}$ [B] aucune des autres réponses ■ $a + \frac{1}{b}$ [D] $a + \frac{1}{a}$ [E] $a + 1$

☐ **M12** Étant donné deux réels a et b tels que $a - b \neq 0$ et $a + b \neq 0$, la quantité $\frac{a-b}{a+b} - \frac{b}{a-b}$ est systématiquement égale à :

[A] aucune des autres réponses

■ $\frac{a(a-3b)}{a^2-b^2}$

[C] $\frac{a-2b}{b}$

[D] $-1 - \frac{1}{a}$

[E] $\frac{a^2-ab-2b^2}{a^2-b^2}$

☐ **M13** Étant donné deux réels a et b distincts et non nuls, la quantité $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a-b}+\dfrac{a+b}{a^{-1}-b^{-1}}$ est systématiquement égale à :

$\boxed{\text{A}}$ aucune des autres réponses

$\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{a+b}{2}$

$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{a+b}{ab(a-b)}$

$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{-ab}{(a-b)^2}$

■ $\dfrac{(a+b)(1-ab)(1+ab)}{ab(a-b)}$

△ **L1** Étant donné deux réels a et b, développer et simplifier l'expression $A = 2\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+(a+b-1)^2$. On écrira le résultat final sans justification.

Exercice 3. Équations et inéquations

☐ **M14** L'équation $2x^2-3x+1=0$ a pour solution(s) :

■ $\dfrac{1}{2}$ et 1 $\boxed{\text{B}}$ aucune des autres réponses proposées $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{3}{4}$ $\boxed{\text{D}}$ $-\dfrac{1}{2}$ et -1 $\boxed{\text{E}}$ 1 et 2

☐ **M15** L'équation $x^3+x=2x^2$ a pour solution(s) :

■ 0 et 1 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ 0, 1 et un autre nombre réel $\boxed{\text{D}}$ 0 $\boxed{\text{E}}$ 0 et -1

☐ **M16** L'équation $x^2=\frac{1}{x}$ a pour solution(s) :

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 et -1 $\boxed{\text{C}}$ 0 et 1 $\boxed{\text{D}}$ 1 et deux autres nombres réels ■ 1

☐ **M17** L'inéquation $-x^2+x-1\geq 0$ a pour ensemble de solutions :

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{B}}$ aucune des autres réponses proposées

$\boxed{\text{C}}$ $\left]-\infty,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$

$\boxed{\text{D}}$ $\left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

■ l'ensemble vide

☐ **M18** L'inéquation $\frac{1}{x-1} > 1$ a pour ensemble de solutions :

[A] $]-\infty, 2[$ [B] $]-\infty, 1[$ [C] $]2, +\infty[$ [D] $]1, +\infty[$ ■ $]1; 2[$

△ **L2** Donner sans justification l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 2$.

◯ **R2** Donner, en justifiant votre réponse, l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3 \leq 4x + 2$.

☐ **M19** Le nombre de solutions (réelles) de l'équation $\dfrac{1}{x^2+1} = 2$ vaut :

[A] 3 [B] 2 [C] 4 ■ 0 [E] 1

☐ **M20** Le nombre de solutions (réelles) de l'équation $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$ vaut :

[A] 1 [B] 4 [C] 2 [D] 3 ■ 0

Exercice 4. Probabilités

Une urne contient initialement une boule bleue et trois boules rouges. On effectue l'expérience suivante :

- On réalise un premier tirage dans l'urne.
  - Si la boule obtenue est bleue, on la remet dans l'urne et on y ajoute cinq boules bleues supplémentaires (l'urne contient alors six boules bleues et trois boules rouges).
  - Si la boule obtenue est rouge, on ne la remet pas dans l'urne (l'urne contient alors une boule bleue et deux boules rouges).
- On réalise ensuite un deuxième tirage dans l'urne selon la même règle que le première tirage.

On note B_1 l'événement « on a obtenu une boule bleue au premier tirage », et B_2 l'événement « on a obtenu une boule bleue au second tirage ».

☐ **M21** La probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage est :

[A] $\frac{1}{3}$ ■ $\frac{3}{4}$ [C] $\frac{1}{2}$ [D] $\frac{25}{9}$ [E] $\frac{1}{4}$

☐ **M22** On suppose **dans cette question uniquement** qu'on a tiré une boule bleue au premier tirage. Dans cette situation, la probabilité de tirer une boule bleue au deuxième tirage est :

[A] $\frac{1}{2}$ [B] $\frac{1}{3}$ ■ $\frac{2}{3}$ [D] $\frac{1}{16}$ [E] $\frac{1}{6}$

☐ **M23** La probabilité calculée à la question précédente est aussi égale à :

[A] $P(B_1)$ [B] $P(B_2)$ [C] $P_{B_2}(B_1)$ ■ $P_{B_1}(B_2)$

☐ **M24** La probabilité d'obtenir deux boules bleues (une à chaque tirage) est :

[A] $\frac{1}{4}$ [B] $\frac{1}{16}$ [C] $\frac{1}{2}$ [D] $\frac{2}{3}$ ■ $\frac{1}{6}$

☐ **M25** La probabilité d'obtenir une boule bleue au deuxième tirage est :

[A] 1 ■ $\frac{5}{12}$ [C] $\frac{1}{2}$ [D] $\frac{1}{5}$ [E] $\frac{2}{9}$

☐ **M26** On note C l'événement « on a tiré deux boules rouges ». Laquelle des assertions suivantes est vraie ?

[A] $P(B_2) = P(C)$ [B] $P(B_2) > P(C)$ ■ $P(B_2) < P(C)$

Dans la suite, on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules bleues tirées dans cette expérience.

☐ **M27** Les valeurs possibles pour X sont :

[A] $0, 1, 2, \dots, 6$ [B] 1 et 6 ■ 0, 1 et 2

☐ **M28** La probabilité $P(X = 1)$ vaut :

[A] $\frac{1}{4}$ [B] $\frac{1}{12}$ [C] $\frac{2}{3}$ ■ $\frac{1}{3}$ [E] $\frac{1}{2}$

△ **L3** Donner sans justification l'espérance de X (sous la forme d'une fraction irréductible).

Exercice 5. Géométrie dans l'espace

L'espace euclidien E est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les droites D et D' paramétrées comme suit :

$$(D) \quad x = t + 2, \quad y = 3t - 1, \quad z = 2t + 2, \quad t \in \mathbb{R}$$

et

$$(D') \quad x = s + 2, \quad y = s + 5, \quad z = -2s + 1, \quad s \in \mathbb{R}.$$

On note enfin P le plan d'équation $x + y - 2z + 4 = 0$.

△ **L4** Donner sans justification un vecteur directeur de D et un vecteur directeur de D'.

☐ **M29** Les droites D et D' :

■ sont orthogonales B sont parallèles C ne sont ni parallèles ni orthogonales

☐ **M30** La droite D :

A est sécante à P mais non orthogonale à P
B est orthogonale à P
■ est parallèle à P mais non incluse dans P
D est incluse dans P

☐ **M31** La droite D' :

A est parallèle à P mais non incluse dans P
■ est orthogonale à P
C est incluse dans P
D est sécante à P mais non orthogonale à P

Dans la suite, on considère les points de l'espace :

$$A\,(0\,;1\,;3),\quad B\,(1\,;4\,;2),\quad C\,(3\,;10\,;0),\quad D\,(-1\,;4\,;2),\quad \text{et}\quad E\,(2\,;3\,;1).$$

Vrai ou faux ?

☐ **M32** Les points A, B et C sont coplanaires.

A Faux ■ Vrai

☐ **M33** Le triangle ABE est rectangle.

A Vrai ■ Faux

☐ **M34** Les points A, B, C, D sont coplanaires.

■ Vrai B Faux

☐ **M35** Le point C appartient au segment $[AB]$.

A Vrai ■ Faux

Exercice 6. Calculs de dérivées

☐ **M36** La dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} + \ln(x)$ est la fonction qui à x associe :

A $\dfrac{2}{x}$ B $\dfrac{2x-1}{x^2} + \ln(x)$ C $\dfrac{1+x}{x^2}$ ■ $\dfrac{x-1}{x^2}$ E $\ln(x) + \dfrac{1}{x}$

☐ **M37** La dérivée de la fonction $x \mapsto x^2 \ln(x) - x$ est la fonction qui à x associe :

A 1 B $x-1$ ■ $2x\ln(x) + x - 1$ D $2x\ln(x)$ E $2x\ln(x) - 1$

☐ **M38** La dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1+2x}{2-x}$ est la fonction qui à x associe :

A $\dfrac{2}{2-x}$ B $\dfrac{-2}{(2-x)^2}$ C -2 D $\dfrac{3-4x}{(2-x)^2}$ ■ $\dfrac{5}{(2-x)^2}$

☐ **M39** La dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto e^{x+2\ln x}$ est la fonction qui à x associe :

■ $x(x+2)e^x$ B $\dfrac{x+2}{x}\,e^x$ C $\dfrac{x}{x+2}\,e^x$ D $\dfrac{1}{x(x+2)}\,e^x$ E $x\,e^x$

☐ **M40** La dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto e^x(\ln x)^2$ est la fonction qui à x associe :

A $e^x \ln x\,(\ln x + 1)$

B $\dfrac{2x\ln x + 1}{x}\,e^x \ln x$

C $\dfrac{x+1}{x}\,e^x\,(\ln x)^2$

■ $\dfrac{x\ln x + 2}{x}\,e^x \ln x$

E $\dfrac{2}{x}\,e^x \ln x$

☐ **M41** Soit u, v et w trois fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}$. La dérivée de uvw est :

A $u'v'w'$

B aucune des autres réponses proposées

C $vw + uw + uv$

■ $u'vw + uv'w + uvw'$

E $u'v'w + uv'w' + u'vw'$

△ **L5** Donner une expression, la plus simple possible, de la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

□ **M42** La dérivée de $x \mapsto \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$ est la fonction qui à x associe :

A $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

B $\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$

■ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

D $\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}$

E $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

△ **L6** Donner sans justification la dérivée de la fonction $x \mapsto x\ln(1+e^{2x})$.

Exercice 7. Limites de fonctions

☐ **M43** Lorsque x tend vers $-\infty$, la quantité $-10x^2 + 3x^6 + 4$ tend vers :

A $3x^6$ B $-\infty$ C 1 D 4 ■ $+\infty$

☐ **M44** Lorsque x tend vers 2, la quantité $\left(\frac{1}{x} + x\right) \ln(x)$ tend vers :

■ une limite finite non nulle B 0 C $-\infty$ D aucune limite E $+\infty$

☐ **M45** Lorsque x tend vers $+\infty$, la quantité $\dfrac{e^x}{e^{-x} - 1}$ tend vers :

A une limite finie non nulle B 0 C $+\infty$ D aucune limite ■ $-\infty$

☐ **M46** Lorsque x tend vers $-\infty$, la quantité $e^{2x} - xe^x - x^5$ tend vers :

A aucune limite B $-\infty$ ■ $+\infty$ D 1 E 0

☐ **M47** Lorsque x tend vers $+\infty$, la quantité $\dfrac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}}$ tend vers :

A $+\infty$ B aucune des autres réponses proposées ■ 1 D 0 E $-\infty$

☐ **M48** Lorsque x tend vers $+\infty$, la quantité $\dfrac{\ln(1 + e^{-2x})}{e^{-x}}$ tend vers :

A $-\infty$ B 1 ■ 0 D $+\infty$ E aucune des autres réponses proposées

☐ **M49** Lorsque x tend vers 0, la quantité $\dfrac{e^{2+3x} - e^2}{x}$ tend vers :

A $3e$ B e^2 C $-\infty$ ■ $3e^2$ E $+\infty$

◯ **R3** Déterminer, en la justifiant, la limite quand x tend vers $+\infty$ de $x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{e^x}} - 1\right)$.

Exercice 8. Géométrie plane

Dans tout cet exercice, on considère un parallélogramme non aplati $ABCD$. On prend un point I sur la droite (AC), distinct de A, et on écrit $\overrightarrow{AI} = \mu \overrightarrow{AC}$ où μ est un réel non nul. On prend aussi un point K sur la droite (AB), distinct de A, et on écrit $\overrightarrow{AK} = \nu \overrightarrow{AB}$ où ν est un réel non nul. On note enfin J le milieu du segment $[BC]$.

☐ **M50** Si $\mu = \dfrac{1}{2}$, alors les droites (IJ) et (AK) :

A sont sécantes quelle que soit la valeur de ν

B peuvent être sécantes ou parallèles, selon la valeur de ν

■ sont parallèles quelle que soit la valeur de ν

☐ **M51** Si $\mu = \dfrac{1}{2}$, alors :

A on peut choisir ν pour que I, J et K soient alignés

■ on ne peut pas choisir ν pour que I, J et K soient alignés

☐ **M52** Si $\mu = 1$, alors :

A I, J et K ne peuvent pas être alignés

B I, J et K sont alignés si et seulement si $K = D$

■ I, J et K sont alignés si et seulement si $K = B$

D I, J et K sont alignés si et seulement si $K = C$

E I, J et K sont alignés si et seulement si $K = A$

☐ **M53** Si $\mu = 1$, alors (BI) et (AD) sont :

A sécantes B confondues ■ parallèles mais non confondues

Dans toute la suite, on suppose que $\mu \neq \dfrac{1}{2}$, $\mu \neq 1$ et $\nu \neq 1$.

☐ **M54** Les points I, J et K sont alignés si et seulement si :

A $\mu - \nu = \mu\nu$ B $\mu + \nu = \mu\nu$ ■ $\mu + \nu = 2\mu\nu$ D $2\mu + \nu = 2\mu\nu$ E $\mu + 2\nu = \mu\nu$

○ **R4** Justifier brièvement votre réponse à la question **M54**.

☐ **M55** μ est fixé et on rappelle qu'il appartient à $\mathbb{R} \setminus \left\{0\,,\frac{1}{2}\,,1\right\}$. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

[redacted] Il existe un unique ν tel que I, J et K soient alignés

B Il existe une infinité de ν tels que I, J et K soient alignés

C Le nombre de ν tels que I, J et K soient alignés dépend de μ

D Il n'existe aucun ν tel que I, J et K soient alignés

☐ **M56** Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\right)$, une équation cartésienne de la droite (BI) est :

A $(\mu-1)x-\mu y+(\mu-1)=0$

B $\mu x+(\mu-1)y-\mu=0$

C $(\mu-1)x+\mu y-(\mu-1)=0$

[redacted] $\mu x-(\mu-1)y-\mu=0$

E aucune des autres réponses proposées

☐ **M57** Quand (AD), (KC) et (BI) sont concourantes, les coordonnées de leur point d'intersection dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD})$ sont :

A $\left(0\,,\dfrac{\mu}{\mu-1}\right)$ B $\left(0\,,\dfrac{1-\mu}{\mu}\right)$ [redacted] $\left(0\,,\dfrac{\mu}{1-\mu}\right)$ D $\left(0\,,\dfrac{\mu-1}{\mu}\right)$ E $\left(0\,,\dfrac{1}{\mu}\right)$

☐ **M58** Les droites (AD), (KC) et (BI) sont concourantes si et seulement si :

A $2\mu+\nu=2\mu\nu$

[redacted] $\mu+\nu=2\mu\nu$

C $\mu+\nu=\mu\nu$

D $\mu-\nu=\mu\nu$

E $\mu+2\nu=\mu\nu$

☐ **M59** Combien y a-t-il de couples $(\mu\,,\nu)$ tels que à la fois I, J et K soient alignés, et à la fois (AD), (KC) et (BI) soient concourantes ?

A Un nombre fini strictement supérieur à 2

B Un seul

C Aucun

D Deux

[redacted] Une infinité

Exercice 9. Fonctions hyperboliques

On définit la fonction **cosinus hyperbolique** (notée ch) et la fonction **sinus hyperbolique** (notée sh) sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On définit la fonction **tangente hyperbolique** (notée th) par :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

△ **L7** Donner la dérivée de ch.

△ **L8** Donner la dérivée de sh.

☐ **M60** La fonction th :

[A] n'est pas définie en tout réel ■ est définie en tout réel

☐ **M61** La fonction th :

[A] s'annule en plusieurs points [B] ne s'annule pas ■ s'annule en exactement un point

☐ **M62** Sur $\mathbb{R}$, la fonction ch :

■ n'est pas monotone [B] est strictement croissante [C] est strictement décroissante

☐ **M63** Sur $\mathbb{R}$, la fonction sh :

[A] est strictement décroissante [B] n'est pas monotone ■ est strictement croissante

☐ **M64** Pour tout réel x, la quantité $(\mathrm{ch}(x))^2 - (\mathrm{sh}(x))^2$ vaut :

[A] e^{-2x} ■ 1 [C] $2\,e^{2x}$ [D] e^{2x} [E] -1

☐ **M65** Sur $\mathbb{R}$, la fonction th :

[A] est strictement décroissante [B] n'est pas monotone ■ est strictement croissante

☐ **M66** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

A Tout réel strictement négatif a exactement deux antécédents par la fonction ch

■ Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

C Tout réel strictement positif a exactement deux antécédents par la fonction ch

D Tout réel non nul a exactement deux antécédents par la fonction ch, mais 0 n'en a qu'un

E Tout réel a exactement un antécédent par la fonction ch

☐ **M67** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

A Il existe des réels qui ont plusieurs antécédents par la fonction sh

B Tout réel y a exactement un antécédent par la fonction sh et il s'agit de $\ln\left(-y+\sqrt{y^2+1}\right)$

■ Tout réel y a exactement un antécédent par la fonction sh et il s'agit de $\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$

D Il existe des réels qui n'ont pas d'antécédent par la fonction sh

E Tout réel y a exactement un antécédent par la fonction sh et il s'agit de $\ln\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)$

Dans les questions suivantes, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction th.

☐ **M68** Deux points d'abscisses opposées sur $\mathcal{C}$:

A ont systématiquement la même ordonnée

■ ont systématiquement des ordonnées opposées

C Aucune des autres réponses proposées n'est vraie

☐ **M69** En deux points d'abscisses opposées sur la courbe $\mathcal{C}$, les tangentes à $\mathcal{C}$:

A sont systématiquement perpendiculaires

B sont systématiquement sécantes en un point de l'axe des ordonnées

C sont systématiquement sécantes en un point de l'axe des abscisses

D Aucune des autres réponses proposées n'est vraie

■ sont systématiquement parallèles

☐ **M70** Les limites respectives de la fonction th en $-\infty$ et en $+\infty$ sont :

■ -1 et 1

B 0 et 1

C 0 et $+\infty$

D $-\infty$ et 0

E $-\infty$ et $+\infty$

□ **M71** La limite quand x tend vers $+\infty$ de $e^x(1 - \mathrm{th}(x))$:

■ existe et vaut 0

$\boxed{\text{B}}$ existe et vaut $+\infty$

$\boxed{\text{C}}$ existe et vaut 1

$\boxed{\text{D}}$ n'existe pas

$\boxed{\text{E}}$ existe et vaut $-\infty$

△ **R5** En justifiant votre réponse, déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $e^{2x}(1 - \mathrm{th}(x))$.

Exercice 10. Autour de la partie entière

Dans cet exercice, on note E la fonction partie entière qui à un nombre réel x attache l'unique entier relatif $k = E(x)$ tel que $k \leq x < k+1$.

☐ **M72** Quelle est la partie entière de $\sqrt{45}$?

■ 6   [B] 45   [C] Aucune des autres réponses   [D] 5   [E] 7

☐ **M73** La fonction qui à tout réel positif x associe $E(x^2)$:

[A] est strictement décroissante
[B] n'est pas monotone
■ est croissante mais pas strictement croissante
[D] est décroissante mais pas strictement décroissante
[E] est strictement croissante

☐ **M74** L'égalité $E(-x) = -E(x)$ est :

■ Aucune des autres réponses proposées n'est juste
[B] vraie pour toute valeur du réel x
[C] fausse pour toute valeur du réel x sauf un nombre fini d'entre elles
[D] vraie pour toute valeur du réel x sauf un nombre fini d'entre elles
[E] fausse pour toute valeur du réel x

☐ **M75** La quantité $E(2x)$:

[A] est égale à $2\,E(x)$ quelle que soit la valeur de x
[B] est égale à $2\,E(x)+1$ quelle que soit la valeur de x
■ est égale à $2\,E(x)$ ou $2\,E(x)+1$ selon la valeur de x
[D] est égale à $2\,E(x)$ ou $2\,E(x)-1$ selon la valeur de x
[E] Aucune des autres réponses proposées n'est juste

☐ **M76** Lorsque x parcourt l'ensemble des réels positifs, la quantité $E(x^2) - E(x)^2$:

- [A] parcourt l'ensemble des entiers
- [B] est systématiquement nulle
- [C] parcourt l'ensemble des entiers strictement positifs
- [D] Aucune des autres réponses proposées n'est juste
- ■ parcourt l'ensemble des entiers naturels

☐ **M77** Lorsque x parcourt l'ensemble des réels, la quantité $E(x^2) - E(x)^2$:

- [A] parcourt l'ensemble des entiers strictement positifs
- ■ parcourt l'ensemble des entiers
- [C] parcourt l'ensemble des entiers naturels
- [D] Aucune des autres réponses proposées n'est juste
- [E] est systématiquement nulle

△ **R6** Déterminer, en justifiant soigneusement votre réponse, l'ensemble des réels x vérifiant $E(x^2) = x + \frac{1}{2}$.
