TeSciA

2023

Mathématiques Expertes

Épreuve 2, Option A

25 mars 2023

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ◯ ◯ ●

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

TeSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).

Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.

AORES

Exercice 1. Nombres complexes

☐ **M1** Le produit $(1-3i)(4+i)$ vaut :

$\boxed{\text{A}}$ $1-13i$ $\boxed{\text{B}}$ $-4+10i$ $\boxed{\text{C}}$ $7-11i$ $\boxed{\text{D}}$ $-7-10i$ $\boxed{\text{E}}$ $7+11i$

☐ **M2** Le nombre complexe $5+12\,i$ a pour module :

$\boxed{\text{A}}$ 106 $\boxed{\text{B}}$ 17 $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{13}$ $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{17}$ $\boxed{\text{E}}$ 13

☐ **M3** L'inverse du nombre complexe $3+4i$ est :

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{3}{5}-\frac{4i}{5}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3}{25}-\frac{4i}{25}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{3}+\frac{i}{5}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{1}{3}-\frac{i}{5}$ $\boxed{\text{E}}$ $\frac{1}{3}+\frac{i}{4}$

△ **L1** Mettre le quotient $\dfrac{7+i}{1+2i}$ sous la forme $a+ib$, avec a et b réels.

☐ **M4** L'équation $z^2-6z+11=0$ possède pour solutions complexes :

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{3+2i\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{3-2i\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\text{B}}$ $-3+2i\sqrt{2}$ et $-3+2i\sqrt{2}$

$\boxed{\text{C}}$ $-3+i\sqrt{2}$ et $-3-i\sqrt{2}$

$\boxed{\text{D}}$ aucune de ces réponses

$\boxed{\text{E}}$ $3+i\sqrt{2}$ et $3-i\sqrt{2}$

☐ **M5** Le nombre de solutions complexes de l'équation $z^5=1$ est :

$\boxed{\text{A}}$ 4 $\boxed{\text{B}}$ 5 $\boxed{\text{C}}$ 3 $\boxed{\text{D}}$ 1 $\boxed{\text{E}}$ 2

☐ **M6** Le nombre de nombres complexes z vérifiant simultanément $z^{15}=1$ et $z^{25}=1$ est :

$\boxed{\text{A}}$ fini et compris strictement entre 1 et 5

$\boxed{\text{B}}$ fini et au moins égal à 5

$\boxed{\text{C}}$ infini

$\boxed{\text{D}}$ 1

$\boxed{\text{E}}$ nul

◯ **R1** Donner, en justifiant votre réponse, le nombre exact de nombres complexes z vérifiant simultanément $z^{15}=1$ et $z^{25}=1$.

☐ **M7** Le module et un argument de $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2$ sont respectivement :

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{2}$ et $-\frac{\pi}{6}$ $\boxed{\text{B}}$ 4 et $-\frac{2\pi}{3}$ $\boxed{\text{C}}$ 2 et $-\frac{2\pi}{3}$ $\boxed{\text{D}}$ 2 et $\frac{-\pi}{3}$ $\boxed{\text{E}}$ 4 et $\frac{2\pi}{3}$

☐ **M8** Soit $a\in\,]0,\pi[$. Le nombre complexe $z=-i\cos a-\sin a$ est alors égal à :

$\boxed{\text{A}}$ $e^{i(-a-\pi/2)}$ $\boxed{\text{B}}$ e^{ia} $\boxed{\text{C}}$ e^{-ia} $\boxed{\text{D}}$ $e^{i(a+\pi)/2}$ $\boxed{\text{E}}$ $-e^{ia}$

☐ **M9** Soit $a \in]-\pi, \pi[$. Le nombre complexe $z = 1 + \cos a - i \sin a$ est alors égal à :

A $2\cos(a/2)\, e^{ia/2}$ B $2\cos(a/2)\, e^{-ia/2}$ C $e^{-ia/2}$ D $-e^{ia/2}$ E $2\sin(a/2)\, e^{ia/2}$

☐ **M10** Le nombre complexe $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{2401}$ vaut :

A $\sqrt{2}^{2401} e^{i\frac{\pi}{12}}$ B $\sqrt{2}^{2401} e^{-i\frac{\pi}{12}}$ C $2^{2401} e^{i\frac{\pi}{12}}$ D 1 E $2^{2401} e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Exercice 2. Semi-inverses d'une fonction

Dans tout cet exercice, on se donne deux fonctions f et g, définies en tout réel et à valeurs réelles. On introduit quatre conditions :

- (f, g) vérifie $\mathcal{C}_1$ lorsque $g(f(x)) = x$ pour tout réel x.
- (f, g) vérifie $\mathcal{C}_2$ lorsque $f(g(y)) = y$ pour tout réel y.
- (f, g) vérifie $\mathcal{C}_3$ lorsque $f(g(f(x))) = f(x)$ pour tout réel x.
- (f, g) vérifie $\mathcal{C}_4$ lorsque $g(f(g(y))) = g(y)$ pour tout réel y.

Par exemple :

- lorsque $f(x) = \frac{x}{2}$ pour tout réel x, et $g(y) = 2y$ pour tout réel y, les conditions $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont évidemment vérifiées ;
- lorsque $f(x) = \frac{x}{2}$ pour tout réel x, et $g(y) = y + 1$ pour tout réel y, la condition $\mathcal{C}_1$ n'est pas vérifiée, car l'égalité $\frac{x}{2} + 1 = x$ ne vaut pas pour $x = 0$ (par exemple).

Pour un réel y, on pose $\operatorname{sgn}(y) = 1$ si $y \geqslant 0$, et $\operatorname{sgn}(y) = -1$ si $y < 0$.

On dit qu'une fonction est **constante** lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur.

On introduit enfin les cinq fonctions particulières f_1, f_2, g_1, g_2 et g_3 qui suivent :

- f_1 associe à tout réel x le réel $f_1(x) = e^x$;
- f_2 associe à tout réel x le réel $f_2(x) = x^2$;
- g_1 associe à tout réel y le réel $g_1(y) = \ln(y)$ si $y > 0$, et $g_1(y) = 0$ sinon ;
- g_2 associe à tout réel y le réel $g_2(y) = \sqrt{|y|}$;
- g_3 associe à tout réel y le réel $g_3(y) = \operatorname{sgn}(y) \cdot \sqrt{|y|}$. Par exemple, $g_3(-4) = -2$ et $g_3(9) = 3$.

Vrai ou faux ?

Dans les questions **M11** à **M27**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

☐ **M11** La condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée par le couple (f_1, g_1).

A Faux B Vrai

☐ **M12** La condition $\mathcal{C}_2$ est vérifiée par le couple (f_1, g_1).

A Vrai B Faux

☐ **M13** La condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

A Faux B Vrai

☐ **M14** La condition $\mathcal{C}_2$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

A Vrai B Faux

☐ **M15** La condition $\mathcal{C}_3$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

A Faux B Vrai

☐ **M16** La condition $\mathcal{C}_4$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

A Faux B Vrai

☐ **M17** La condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

A Vrai B Faux

☐ **M18** La condition $\mathcal{C}_2$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

A Faux B Vrai

☐ **M19** La condition $\mathcal{C}_3$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

A Vrai B Faux

☐ **M20** La condition $\mathcal{C}_4$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

A Vrai B Faux

☐ **M21** Quel que soit le choix des fonctions f et g, si la condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée alors la condition $\mathcal{C}_2$ l'est aussi.

A Vrai B Faux

☐ **M22** Quel que soit le choix des fonctions f et g, si les conditions $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont vérifiées alors la condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée.

A Faux B Vrai

☐ **M23** Quel que soit le choix des fonctions f et g, si la condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée alors les conditions $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont vérifiées.

A Vrai B Faux

☐ **M24** Si $\mathcal{C}_1$ est vérifiée alors f prend toutes les valeurs réelles possibles.

A Faux B Vrai

☐ **M25** Si $\mathcal{C}_1$ est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors $\mathcal{C}_2$ est vérifiée.

A Faux B Vrai

☐ **M26** Si $\mathcal{C}_3$ est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors $\mathcal{C}_1$ est vérifiée.

A Vrai B Faux

☐ **M27** Si $\mathcal{C}_3$ est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors $\mathcal{C}_2$ est vérifiée.

A Faux B Vrai

☐ **M28** Pour la fonction f qui à x associe $x + 1$:

A Il existe plusieurs fonctions g telles que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

B Il n'existe aucune fonction g telle que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

C Il existe exactement une fonction g tel que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

☐ **M29** Pour la fonction f qui à x associe $|x|$:

A Il n'existe aucune fonction g telle que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

B Il existe plusieurs fonctions g telles que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

C Il existe exactement une fonction g tel que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

△ **L2** On suppose que la fonction g est constante. Expliciter sans démonstration les fonctions f telles que $\mathcal{C}_3$ soit vérifiée.

◯ **R2** Démontrer que f est constante si et seulement si la propriété $\mathcal{C}_3$ est vérifiée quelle que soit la fonction g.

Suite itérée croisée

On fixe un réel a et l'on définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à termes réels en posant $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \begin{cases} g(u_n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(u_n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

☐ **M30** En supposant validée la condition $\mathcal{C}_2$, quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a, f et g, celle qui apporte l'information la plus précise ?

A La suite u est constante

B La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes

C La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes

D La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes

E La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs

☐ **M31** En supposant validée la condition $\mathcal{C}_3$, quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a, f et g, celle qui apporte l'information la plus précise ?

- A La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes
- B La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs
- C La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes
- D La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes
- E La suite u prend au plus 5 valeurs distinctes

☐ **M32** En supposant validée la condition $\mathcal{C}_4$, quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a, f et g, celle qui apporte l'information la plus précise ?

- A La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes
- B La suite u prend au plus 5 valeurs distinctes
- C La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes
- D La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs
- E La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes

Exercice 3. Questions de divisibilité

Dans les questions **M33** à **M36**, on se donne un entier naturel *impair* p différent de 1, et a un entier naturel non nul.

☐ **M33** L'implication « si p divise a alors a est impair » :

- A est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie
- B peut tomber en défaut même si p est premier
- C est toujours vraie

☐ **M34** L'implication « si p divise $2a$ alors p divise a » :

- A est toujours vraie
- B peut tomber en défaut même si p est premier
- C est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie

☐ **M35** L'implication « si p divise a^2 alors p divise a » :

- A peut tomber en défaut même si p est premier
- B est toujours vraie
- C est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie

☐ **M36** L'implication « si p divise $8a^2$ alors p divise a » :

A est toujours vraie

B est vraie sous l'hypothèse que p est premier, mais n'est pas toujours vraie

C peut tomber en défaut même si p est premier

Dans la suite de l'exercice, on se donne un nombre premier p impair, ainsi que deux entiers naturels a et b non nuls.

☐ **M37** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de diviseurs positifs de p^n est :

A $p^n - 1$ B n C $n+1$ D $n-1$ E p^{n-1}

☐ **M38** L'affirmation « $p+1$ a strictement plus de diviseurs que p » :

A est systématiquement fausse

B est systématiquement vraie

C peut être vraie ou fausse, selon la valeur de p

◯ **R3** Justifier votre réponse à la question **M38**.

☐ **M39** Si a a exactement trois diviseurs positifs alors on peut affirmer que :

A a est le carré d'un nombre premier

B a est le cube d'un nombre premier

C $a = 12$

D a est le produit de deux nombres premiers distincts

E a est premier

△ **L3** On suppose que a possède exactement trois diviseurs positifs et que b en possède exactement deux. Donner sans démonstration les valeurs possibles (lorsque a et b varient) pour le nombre D de diviseurs positifs de ab.

☐ **M40** Si le nombre de diviseurs positifs de a est premier et impair alors :

A a est premier

B $a = 1$

C a possède plusieurs diviseurs premiers

D a possède un unique diviseur premier, mais a n'est pas premier

Exercice 4. Nombres complexes et géométrie

Pour un nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier relatif k tel que $k \leqslant x < k+1$. Pour un nombre complexe z, on note $d(z)$ le plus petit des deux réels $\mathrm{Im}(z) - \lfloor \mathrm{Im}(z) \rfloor$ et $\lfloor \mathrm{Im}(z) + 1 \rfloor - \mathrm{Im}(z)$.

△ **L4** Donner une expression simplifiée de $d(1)$, $d\left(\dfrac{i}{2}\right)$ et $d\left(1+\dfrac{5}{4i}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on se place dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormal, dans lequel sont calculés coordonnées et affixes des points. Il pourra être judicieux, pour interpréter la valeur de $d(z)$, de raisonner à l'aide des droites D_k et D_{k+1} pour k entier, où l'on note D_t la droite d'équation $y = t$.

☐ **M41** Quels que soient les réels x et y :

- A $d(x+iy) = -d(y)$
- B $d(x+iy) = d(x) + d(y)$
- C $d(x+iy) = d(iy)$
- D $d(x+iy) = d(x)$
- E $d(x+iy) = d(x) - d(y)$

☐ **M42** Pour tout nombre complexe z :

- A $d(-z) \neq -d(z)$ sauf si z est entier
- B $d(-iz) = -d(z) + 1$ si z est entier
- C $d(-z) = -d(z)$
- D $d(-z) = d(z)$ si est z rationnel, et seulement dans ce cas
- E $d(-z) = d(z)$

☐ **M43** Pour tout nombre complexe z et tout entier relatif q :

- A $d(z+iq) = d(z)$
- B $d(z+iq) = d(z) + iq$
- C $d(z+iq) = d(iq)$
- D $d(z+iq) = d(z) - q$
- E $d(z+iq) = d(z) - i(q)$

☐ **M44** Lorsque z décrit $\mathbb{C}$, le nombre complexe $d(z)$ décrit :

A $[0,1[$ B $[0,1]$ C $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ D $[0,\frac{1}{2}]$ E $[0,\frac{1}{2}[$

Pour un nombre complexe z, on note

$$t(z) = \text{Re}(z) + id(z).$$

À tout point M du plan, d'affixe z, on associe le point $T(M)$ d'affixe $t(z)$.
On considère enfin les points M_1 et M_2 d'affixes respectives 1 et $1+i$, ainsi que le milieu M_3 du segment $[M_1, M_2]$.

☐ **M45** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- A $T(M_1) = T(M_3)$
- B $T(M_3)$ est le milieu du segment $[T(M_1), T(M_2)]$
- C $T(M_1) = M_3$
- D $T(M_1) = M_1$ et $T(M_3) = M_3$
- E $T(M_1) = M_2$

Étant donné deux réels a et b tels que $a \leqslant b$, on note $I_{a,b}$ l'ensemble des complexes z tels que $a \leqslant \text{Im}(z) \leqslant b$.

☐ **M46** Soit n un entier naturel non nul. Sur l'ensemble $I_{n,n+\frac{1}{2}}$, la fonction qui à M associe $T(M)$ agit comme :

- A Une translation selon un vecteur non nul
- B Une symétrie centrale
- C Une symétrie orthogonale
- D La fonction identité
- E Une projection orthogonale

☐ **M47** Soit n un entier naturel non nul. Sur l'ensemble $I_{n+\frac{1}{2},n+1}$, la fonction qui à M associe $T(M)$ agit comme :

- A La fonction identité
- B Une symétrie centrale
- C Une symétrie orthogonale
- D Une translation selon un vecteur non nul
- E Une projection orthogonale

Exercice 5. Ensembles bien ordonnés

Soit A un ensemble formé de nombres réels (autrement dit, une partie de $\mathbb{R}$).

- Un **plus petit élément** de A est un élément a de A tel que $a \leqslant x$ pour tout x dans A.
- Un **plus grand élément** de A est un élément b de A tel que $x \leqslant b$ pour tout x dans A.

On dit que A est **bien ordonné** lorsque toute partie non vide de A admet un plus petit élément. Par exemple :

- $\{0;1\}$ est bien ordonné car ses parties non vides sont $\{0;1\}$, $\{0\}$ et $\{1\}$, et chacune a un plus petit élément (respectivement : 0, 0 et 1) ;
- $\mathbb{N}$ est bien ordonné (cela doit être considéré comme évident) ;
- $[0;1]$ n'est pas bien ordonné car, par exemple, $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ est dénué de plus petit élément bien que non vide.

On rappelle enfin qu'un ensemble est **fini** lorsqu'il n'a qu'une quantité finie d'éléments, et **infini** dans le cas contraire (par exemple, le segment $[0,1]$ est infini).

△ **L5** Parmi les ensembles suivants, indiquer sans démonstration lesquels sont bien ordonnés :

$$\left\{0;1;\sqrt{2}\right\}, \quad [0,+\infty[\,, \quad]0;1]\,, \quad \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}.$$

☐ **M48** Une partie bien ordonnée et non vide de $\mathbb{R}$:

A admet nécessairement un plus grand élément et un plus petit élément

B admet nécessairement un plus grand élément, mais pas nécessairement un plus petit élément

C peut n'avoir ni plus grand élément, ni plus petit élément

D admet nécessairement un plus petit élément, mais pas nécessairement un plus grand élément

Vrai ou faux (1) ?

Dans les questions **M49** à **M54**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

☐ **M49** Toute partie finie de $\mathbb{R}$ est bien ordonnée.

A Vrai B Faux

☐ **M50** Toute partie bien ordonnée de $\mathbb{R}$ est finie.

A Faux B Vrai

☐ **M51** Tout sous-ensemble non vide d'un ensemble bien ordonné est bien ordonné.

A Faux B Vrai

☐ **M52** L'ensemble constitué des nombres de la forme $\dfrac{n-1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est bien ordonné.

A Faux B Vrai

☐ **M53** L'ensemble constitué des nombres de la forme $\frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est bien ordonné.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M54** L'ensemble constitué des nombres de la forme $\dfrac{n^2+1}{2023\,n+\sin(n)+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$, est bien ordonné.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

◯ **R4** Justifier votre réponse à la question **M54**.

Vrai ou faux (2) ?

Dans les questions **M55** à **M59**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

☐ **M55** Pour toute partie bien ordonnée A de $\mathbb{R}$ et tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, l'intersection $[a, b] \cap A$ (constituée des éléments communs à A et $[a, b]$) est finie.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M56** Quelles que soient les parties bien ordonnées A et B de $\mathbb{R}$, leur réunion $A \cup B$ (constituée des réels appartenant à au moins l'une des parties A et B) est bien ordonnée.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M57** Quelles que soient les parties bien ordonnées A et B de $\mathbb{R}$, l'ensemble $A \Delta B$, formé des réels appartenant à un et un seul des ensembles A et B, est bien ordonné.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M58** Toute partie bien ordonnée A de $\mathbb{R}$ ayant un plus grand élément est finie.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M59** Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, si A et $-A$ (formé des nombres de la forme $-x$, avec x dans A) sont bien ordonnées alors A est finie.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

△ **R5** Justifier succinctement votre réponse à la question **M59**.

Isordonnies

Étant donné deux parties A et B de $\mathbb{R}$, une **isordonnie** de A dans B est une fonction f d'ensemble de définition A, à valeurs dans B et qui vérifie les deux conditions suivantes :

(C) f est strictement croissante, autrement dit $f(x_1) < f(x_2)$ quels que soient x_1 et x_2 dans A vérifiant $x_1 < x_2$.

(P) Pour toute valeur y atteinte par f, tout élément de B inférieur à y est une valeur atteinte par f.

Par exemple :

- La fonction $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à k associe $-k$ vérifie la condition (P) mais pas la condition (C) : ce n'est donc pas une isordonnie.
- La fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à k associe k vérifie la condition (C) mais pas la condition (P) (par exemple 1 est atteint par g, mais pas $\frac{1}{2}$). Ce n'est donc pas une isordonnie.

△ **L6** On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Parmi les cinq assertions suivantes, indiquer sans justification lesquelles sont vraies :

(A1) La fonction identité est une isordonnie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

(A2) La fonction identité est une isordonnie de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$.

(A3) La fonction identité est une isordonnie de $2\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

(A4) La fonction qui à n associe $2n$ est une isordonnie de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N}$.

(A5) La fonction qui à n associe $n+1$ est une isordonnie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Le raisonnement suivant, qui ne contient pas d'erreur formelle mais est insuffisamment détaillé, prétend démontrer que, pour n'importe quelle partie bien ordonnée A de $\mathbb{R}$, la fonction identité est la seule isordonnie de A dans A.

Soit A une partie bien ordonnée de $\mathbb{R}$, et f une isordonnie de A dans A. On raisonne par l'absurde en supposant que f n'est pas la fonction identité. (1) L'ensemble des éléments x de A tels que $f(x) \neq x$ est une partie non vide de A, que l'on note A_0. (2) L'ensemble A_0 possède un plus petit élément y. (3) On a $f(x) = x$ pour tout élément x de A strictement inférieur à y. (4) On ne peut donc avoir $f(y) < y$. (5) On ne peut pas non plus avoir $f(y) > y$. (6) On a ainsi une contradiction.

Dans les questions suivantes, on demande des précisions quant aux détails manquants dans le raisonnement.

☐ **M60** La validité de l'étape (1) :

A nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)

B nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)

C ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)

D nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)

☐ **M61** Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (2) :

A nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)

B nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)

C nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)

D ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)

☐ **M62** Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (3) :

A ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)

B nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)

C nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)

D nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)

☐ **M63** Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (4) :

A nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)

B ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)

C nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)

D nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)

☐ **M64** Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (5) :

A nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)

B nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)

C ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)

D nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)

☐ **M65** Les étapes précédentes étant considérées acquises, la validité de l'étape (6) :

A nécessite d'utiliser l'hypothèse (C), mais pas l'hypothèse (P)

B nécessite d'utiliser l'hypothèse (P), mais pas l'hypothèse (C)

C ne nécessite d'utiliser ni l'hypothèse (C) ni l'hypothèse (P)

D nécessite d'utiliser simultanément les hypothèses (P) et (C)

☐ **M66** Dans combien d'étapes est utilisée implicitement l'hypothèse voulant que A est bien ordonné ?

A 4 B 1 C 2 D 3 E 0

Exercice 6. Nombre de distances entre n points du plan

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $E = \{P_1, \ldots, P_n\}$ un ensemble constitué d'exactement n points du plan. On note D l'ensemble des distances entre ces points, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels $d > 0$ pour lesquels il existe deux points *distincts* P_i et P_j tels que $d = P_iP_j$. On note m le nombre d'éléments de D, appelé **nombre de distances** de E.

□ **M67** On suppose dans cette question que $n = 3$. La plus petite valeur possible pour m est alors :

$\boxed{\text{A}}$ 5 $\boxed{\text{B}}$ 4 $\boxed{\text{C}}$ 2 $\boxed{\text{D}}$ 1 $\boxed{\text{E}}$ 3

□ **M68** Sachant que les points de E sont alignés ou sur un même demi-cercle, la plus petite valeur possible pour m est :

$\boxed{\text{A}}$ $2n-1$ $\boxed{\text{B}}$ n $\boxed{\text{C}}$ $2n+1$ $\boxed{\text{D}}$ $n-1$ $\boxed{\text{E}}$ $2n$

△ **R6** Déterminer la plus grande valeur possible pour m sachant que les points de E sont alignés.

△ **L7** On suppose $4 \leqslant n \leqslant 5$. Donner sans démonstration la plus petite valeur possible pour m.

□ **M69** L'affirmation « dès que des points de E sont à même distance de P_1, ces points sont sur un même demi-cercle de centre P_1 » :

$\boxed{\text{A}}$ est vraie si P_1P_2 est le plus grand élément de D, mais peut tomber en défaut sinon

$\boxed{\text{B}}$ est toujours vraie

$\boxed{\text{C}}$ peut être fausse même si P_1P_2 est le plus grand élément de D

On note k le plus grand nombre possible de points de E que l'on puisse placer sur un même cercle de centre P_1. On note ℓ le nombre de réels distincts parmi $P_1P_2, P_1P_3, \ldots, P_1P_n$.

△ **L8** Donner un réel a, en fonction de n et k et le plus grand possible, tel que $\ell \geqslant a$.

On suppose, en vue de la dernière question, que P_1P_2 est le plus grand élément de D.

□ **M70** En combinant les minorations de m déduites des questions **M68** et **L8**, et en examinant les valeurs possibles pour k, l'inégalité la plus fine que l'on puisse obtenir est :

$\boxed{\text{A}}$ $m \geqslant \frac{n}{2}$ $\boxed{\text{B}}$ $m \geqslant \sqrt{n}$ $\boxed{\text{C}}$ $m \geqslant \sqrt{n} - 1$ $\boxed{\text{D}}$ $m \geqslant \frac{n}{4}$ $\boxed{\text{E}}$ $m \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}$