



2023

---

## Mathématiques Générales

# Épreuve 1

25 mars 2023

14h-15h30 heure de Paris

---

Code sujet : ○ ○ ●

---

### FONCTIONNEMENT DES QUESTIONS

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse  $\square$ . Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse  $\triangle$ . Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ○ ou la feuille-réponse  $\triangle$ , selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

### CONSEILS DE BON SENS

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

*TèSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).*

*Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.*

**AORES**

## Exercice 1. Calcul algébrique et analyse

□ **M1** Pour tout choix du nombre réel  $x$  différent de  $-1$ , la quantité  $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}$  est égale à :

**A**  $\frac{x^3+1}{(x^2+1)(x+1)}$

**B**  $\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x+1)}$

**C** aucune des autres réponses

**D**  $\frac{x}{x+1}$

$\frac{x^3-1}{(x^2+1)(x+1)}$

□ **M2** Pour tout choix du nombre réel  $x$  différent de 0 et de  $-1$ , la quantité  $\frac{x}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$  est égale à :

**A** aucune des autres réponses

$\frac{x^3}{x+1}$

**C**  $\frac{x+1}{x^2}$

**D**  $x$

**E**  $\frac{x}{x+1}$

□ **M3** Pour tout choix du nombre réel  $x$  différent de 0, 1 et  $-1$ , la quantité  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}$  est égale à :

$\frac{2}{x(x^2-1)}$

**B**  $\frac{-2}{x(x^2-1)}$

**C**  $\frac{2x+2}{x(x+1)(x-1)}$

**D**  $\frac{2x-2}{x(x+1)(x-1)}$

**E**  $\frac{2}{x(x^2)-1}$

□ **M4** L'équation  $\frac{1}{x^2} = 5x$  d'inconnue réelle  $x$  :

**A** a exactement deux solutions

**B** n'a pas de solution

a exactement une solution

**D** a une infinité de solutions

**E** a au moins trois solutions, et un nombre fini de solutions

□ **M5** L'équation  $\frac{1}{x+1} = \frac{3}{x-1}$  a pour ensemble de solutions :

**A** l'ensemble vide

$\{-2\}$

**C**  $\{-1; 1\}$

**D**  $\{3\}$

**E**  $\{0\}$

**M6** L'équation  $2x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$  a pour solutions :

**A**  $\frac{3}{4}$

$\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{6}$

**C** 1 et 2

**D**  $-\frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{3}$

**E** aucune des autres réponses proposées

**M7** L'inéquation  $x^3 > 8$  a pour ensemble de solutions :

**A** aucune des autres réponses proposées

**B**  $]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$

**C**  $]-\infty, -2\sqrt{2}[ \cup ]2\sqrt{2}, +\infty[$

**D**  $]2\sqrt{2}, +\infty[$

$]2, +\infty[$

**M8** L'inéquation  $x^2 - x - 1 < 0$  a pour ensemble de solutions :

**A**  $]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$

aucune des autres réponses proposées

**C**  $]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}[ \cup ]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$

**D**  $[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

**E**  $[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

**M9** La somme des solutions distinctes de l'équation  $\sqrt{x^3 + x} = \sqrt{2}x$  vaut :

**A** 3

**B** 2

**C** 0

**D** -1

1

**L1** Donner sans justification l'ensemble des solutions de l'inéquation  $\frac{1}{x+1} > -1$ .

**M10** Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels. Sachant que  $x - y > y$  et  $x + y < y$ , on peut affirmer que :

$x < 0$  et  $y < 0$

**B**  $x < 0$  et  $y > 0$

**C**  $y < x$

**D**  $x < y$

**E**  $x < y < 0$

**M11** Vrai ou faux ? L'inéquation  $e^x \geq x^{2023} + 5$  a une infinité de solutions réelles.

Vrai  Faux

**M12** Pour tout choix des nombres réels  $x, y$ , et  $z$ , le nombre  $x^3 + y^3 + z^3$  est égal à :

**A**  $-3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

**B**  $-xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

**C**  $xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

**E** aucune des autres réponses proposées

**M13** Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que l'égalité  $\frac{35x - 29}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2}$  soit vraie pour tout réel  $x$  différent de 1 et 2. Alors,  $a + 2b$  vaut :

**A** 56  **B** -14  **C** -23  **D** 88  76

**L2** Donner sans justification les triplets  $(x, y, z)$  d'entiers naturels non nuls vérifiant simultanément les relations

$$z^x = y^{2x}, \quad 2^z = 2^x \quad \text{et} \quad x + y + z = 10.$$

**M14** Le nombre de solutions de l'équation  $e^x = x + 1$  est :

**A** 0  **B** 4  **C** 3  **D** 2  1

**R1** Justifier votre réponse à la question **M14**.

## Exercice 2. Géométrie dans l'espace

L'espace affine euclidien est rapporté à un repère orthonormal. On considère les quatre points

$$A(1; 1; \sqrt{6}), \quad B(1; -1; \sqrt{6} - 2), \quad C(1 + \sqrt{6}; 0; 1 + \sqrt{6}) \quad \text{et} \quad D(1 + \sqrt{6}; -2; -1 + \sqrt{6}).$$

**L3** Donner les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .

**R2** Justifier très brièvement que  $A, B, C, D$  sont coplanaires.

△ **L4** Expliciter un vecteur unitaire  $\vec{n}$  orthogonal à la fois à  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .

### Vrai ou Faux ?

**M15** Le quadrilatère  $ABDC$  est un parallélogramme.

A Faux       Vrai

**M16** Le quadrilatère  $ABDC$  est un losange.

A Faux       Vrai

**M17** Le quadrilatère  $ABDC$  est un carré.

Vrai       B Faux

### Un cube

On se donne un cube  $\mathcal{C}$  de l'espace dont les faces ont la même aire que  $ABDC$ .

**M18** Le volume du cube  $\mathcal{C}$  est égal à :

$16\sqrt{2}$        B  $4\sqrt{6}$        C  $6\sqrt{6}$        D  $8^3$        E  $2\sqrt{6}$

**M19** On considère la sphère dont le centre est le centre du cube  $\mathcal{C}$  et qui passe par ses huit sommets. Le rayon de cette sphère est :

A 4       B  $2\sqrt{6}$         $\sqrt{6}$        D  $\sqrt{8}$        E 1

## Exercice 3. Calculs de limites

**M20** La limite de  $3x^6 - 10x^2 + 4$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  :

A est  $-\infty$        B n'existe pas       est  $+\infty$        D est  $3x^6$        E est 4

**M21** La limite de  $\left(\frac{1}{x} + x\right) \ln(x)$  quand  $x$  tend vers 2 :

est finie et non nulle       B est  $+\infty$        C n'existe pas       D est 0       E est  $-\infty$

- **M22** La limite de  $\frac{e^x}{e^{-x} - 1}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  :
- est  $-\infty$      n'existe pas     est  $+\infty$      est finie et non nulle     est 0
- **M23** La limite de  $\frac{\ln(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers  $0^+$  :
- est  $+\infty$      est  $-\infty$      n'existe pas     est finie et non nulle     est 0
- **M24** La limite de  $e^x - e^{2x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  :
- n'existe pas     est 0     est  $-\infty$      est finie et non nulle     est  $+\infty$
- **M25** La limite de  $\ln(3x+1) - \ln(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  :
- est  $-\infty$      n'existe pas     est  $+\infty$      est finie et non nulle     est 0
- **M26** La limite de  $\frac{\ln(x) - x}{x^2}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  :
- est  $+\infty$      est 0     est  $-\infty$      n'existe pas     est finie et non nulle
- **M27** La limite de  $\frac{x^2 - 3x^3}{x^4 e^x - 1}$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  :
- est  $+\infty$      est finie et non nulle     est 0      $-\infty$      n'existe pas
- **M28** La limite de  $\frac{x e^{2x} - e^x \ln(x)}{1 + x^2 e^x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  :
- est  $+\infty$      est  $-\infty$      est 0     n'existe pas     est finie et non nulle
- **M29** La limite de  $\frac{x e^x}{\sqrt{1+x^2} - 1}$  quand  $x$  tend vers  $0^+$  :
- est  $+\infty$      est finie et non nulle     est  $-\infty$      n'existe pas     est 0
- △ **L5** Donner sans justification la limite  $\ell$  de  $\frac{x e^x}{\sqrt{1+x} - 1}$  quand  $x$  tend vers  $0^+$ .
- 

## Exercice 4. Calculs de dérivées

**M30** La dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $-\frac{1}{x} + \ln(x)$  est la fonction qui à  $x$  associe :

**A**  $\frac{x+2}{x^2}$        **B**  $\ln(x) + \frac{1}{x}$        **C**  $\frac{2}{x}$         $\frac{x+1}{x^2}$        **E**  $\frac{-1+x}{x^2}$

**M31** La dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $(x^2 + 1) \ln(x)$  est la fonction qui à  $x$  associe :

**A** 2

**B**  $2x \ln(x) - 1$

**C** 1

**D**  $2x \ln(x) + x + 1$

aucune des autres propositions indiquées

**M32** La dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $\frac{2+x}{2-x}$  est la fonction qui à  $x$  associe :

**A**  $\frac{-2x}{(2-x)^2}$

**B** aucune des autres propositions indiquées

**C**  $\frac{3-4x}{(2-x)^2}$

**D**  $\frac{-2}{(2-x)^2}$

$\frac{4}{(2-x)^2}$

**M33** Sur  $]2, +\infty[$ , la fonction qui à  $x$  associe  $\frac{2+x}{2-x}$  est :

**A** décroissante

croissante

**C** ni croissante ni décroissante

**M34** Sur  $]-\infty, 2[$ , la fonction qui à  $x$  associe  $\frac{2+x}{2-x}$  est :

**A** ni croissante ni décroissante

croissante

**C** décroissante

**M35** Sur  $]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[$ , la fonction qui à  $x$  associe  $\frac{2+x}{2-x}$  est :

**A** décroissante

**B** croissante

ni croissante ni décroissante

**M36** La dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $\ln(1+x^2)$  est la fonction qui à  $x$  associe :

**A**  $\ln(2x)$

$\frac{2x}{1+x^2}$

**C**  $\frac{1}{2x}$

**D**  $\frac{1}{1+x^2}$

**E** aucune des autres propositions indiquées

**M37** La dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $\exp(e^x)$  est la fonction qui à  $x$  associe :

$\exp(x + e^x)$

**B**  $\exp(x + e^x - 1)$

**C**  $\exp(e^x)$

**D**  $e^{2x}$

**E** aucune des autres propositions indiquées

**M38** La dérivée de la fonction qui à  $x$  (réel strictement positif) associe  $\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$  est la fonction qui à  $x$  associe :

**A**  $\frac{1}{x} e^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$\frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

**C**  $\frac{1}{2x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

**D**  $\frac{1+x}{x} e^{\sqrt{x}}$

**E**  $\frac{1}{x} e^{\sqrt{x}}$

**L6** Donner une expression, la plus simplifiée possible, de la dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right)$ .

## Exercice 5. Probabilités

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On lance un dé équilibré à  $n$  faces numérotées de 1 à  $n$ . On lance ensuite une pièce équilibrée autant de fois que le résultat obtenu lors du lancer de dé (par exemple, si le dé est tombé sur 3, on lancera 3 fois la pièce), puis on compte le nombre de fois que la pièce est tombée sur Pile. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le résultat du dé, et  $Y$  la variable aléatoire donnant le nombre de "Pile" obtenus.

Dans les questions **M39** à **M44**, on suppose  $n = 2$ . On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.

**M39** La variable aléatoire  $Y$  prend les valeurs :

$0, 1, 2$

**B**  $0, 1$

**C**  $0, 2$

**D**  $1, 2$

**E** aucune des autres réponses

**M40** Sachant que le dé est tombé sur 2, la probabilité d'obtenir deux "Pile" lors des deux lancers vaut :

- A  $\frac{1}{2}$      B  $\frac{3}{4}$      C  $\frac{1}{3}$      D  $\frac{1}{4}$      E  $\frac{1}{6}$

**M41**  $P(Y = 2)$  vaut :

- A  $\frac{1}{6}$      B  $\frac{1}{8}$      C  $\frac{1}{2}$      D  $\frac{1}{4}$      E  $\frac{1}{3}$

**M42**  $P(Y = 0)$  vaut :

- A  $\frac{1}{8}$      B  $\frac{1}{4}$      C  $\frac{2}{5}$      D  $\frac{3}{8}$      E  $\frac{5}{12}$

**M43**  $P(Y = 1)$  vaut :

- A  $\frac{1}{2}$      B  $\frac{5}{12}$      C  $\frac{5}{6}$      D  $\frac{3}{4}$      E  $\frac{2}{5}$

**M44** L'espérance de  $Y$  est égale à :

- A  $\frac{5}{8}$      B  $\frac{3}{4}$      C  $\frac{4}{5}$      D 2     E 1

On revient au cas général, où  $n$  est quelconque et supérieur ou égal à 2.

**M45**  $P(Y = 0)$  vaut :

- A  $\frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$   
 B  $1 - \frac{1}{2^n}$   
 C aucune des autres valeurs proposées  
 D  $\frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)$   
 E  $\frac{1}{2^n}$

**M46** Pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$ , la probabilité  $P(Y = k)$  vaut :

- A  $\frac{1}{2^n} \left[ \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} \right]$   
 B  $\frac{1}{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$   
 C  $\frac{1}{n 2^n} \left[ \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} \right]$   
 D  $\binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$   
 E  $\frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2^k} \binom{k}{k} + \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k+1}{k} + \dots + \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \right]$

## Exercice 6. Étude d'une suite récurrente

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + (u_n)^2} - \frac{1}{2}$  pour tout entier naturel  $n$ . On définit aussi une suite  $v$  par la relation  $v_n = (u_n)^2 + u_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

M47 Vrai ou faux? On a  $u_n \geq -\frac{1}{2}$  pour tout entier naturel  $n$ .

A Faux       B Vrai

M48 Laquelle des assertions suivantes est vraie?

A La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  n'est ni arithmétique ni géométrique

B La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est géométrique de raison  $-\frac{1}{2}$

C La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$

D La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est arithmétique de raison  $\frac{3}{4}$

E La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est arithmétique de raison  $-\frac{3}{4}$

M49 Pour tout entier naturel  $n$  :

A  $v_n = \frac{3n}{4} + 2$        B  $v_n = \frac{1}{2^{n-1}}$        C  $v_n = \frac{3n}{4} + 1$        D  $v_n = \frac{3n}{4}$        E  $v_n = \frac{1}{2^n}$

M50 Pour tout entier naturel  $n$  :

A  $u_n = \frac{-1 - \sqrt{9 + 3n}}{2}$

B  $u_n = \frac{-1 - \sqrt{1 + 3n}}{2^n}$

C  $u_n = \frac{-1 + \sqrt{9 + 3n}}{2}$

D  $u_n = \frac{-1 + \sqrt{\frac{3n}{4} + 2}}{2}$

E  $u_n = \frac{-1 + \sqrt{\frac{3n}{4}}}{2^n}$

M51 La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  :

A n'est ni croissante ni décroissante       B est croissante       C est décroissante

□ **M52** La limite de  $u$  :

- A** vaut 1    
 vaut  $+\infty$     
 **C** vaut  $\frac{1}{2}$     
 **D** vaut  $-\infty$     
 **E** vaut 0

Dans la suite de l'énoncé, on se donne une suite réelle  $(a_n)_{n \geq 0}$  quelconque ainsi qu'un réel  $\alpha$  quelconque. Si possible, on définit une suite  $(b_n)_{n \geq 0}$  par la condition initiale  $b_0 = \alpha$  et la relation de récurrence

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n + b_n + (b_n)^2} - \frac{1}{2} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

□ **M53** Parmi les conditions suivantes sur  $(a_n)_{n \geq 0}$ , une ou plusieurs garantissent que  $(b_n)_{n \geq 0}$  est définie quel que soit le choix de  $\alpha$ . Précisez, parmi elles, celle qui est la moins contraignante sur  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

- A**  $a_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 **B**  $a_n \geq \frac{1}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 **C**  $a_n \leq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
  $a_n \geq \frac{1}{4}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 **E**  $a_n \geq \frac{3}{4}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

□ **M54** Parmi les conditions suivantes sur  $(a_n)_{n \geq 0}$ , une ou plusieurs garantissent que  $(b_n)_{n \geq 0}$  est définie et positive quel que soit le choix d'un  $\alpha$  positif. Précisez, parmi elles, celle qui est la moins contraignante sur  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

- $a_n \geq \frac{1}{4}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 **B**  $a_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 **C**  $a_n \geq \frac{1}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 **D**  $a_n \leq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 **E**  $a_n \geq \frac{3}{4}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

□ **M55** Parmi les conditions suivantes sur  $(a_n)_{n \geq 0}$ , une ou plusieurs garantissent que  $(b_n)_{n \geq 0}$  est définie et positive à partir du rang 1 quel que soit le choix de  $\alpha$ . Précisez, parmi elles, celle qui est la moins contraignante sur  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

- A**  $a_n \leq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 **B**  $a_n \geq \frac{3}{4}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 **C**  $a_n \geq \frac{1}{4}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 **D**  $a_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
  $a_n \geq \frac{1}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

On suppose désormais que  $(b_n)_{n \geq 0}$  est bien définie. On suppose en outre que  $(a_n)_{n \geq 0}$  converge vers 1. On pose

$$c_n = b_n + (b_n)^2 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

- M56** Vrai ou faux? On peut affirmer que  $c_{n+1} \geq c_n + \frac{3}{4}$  pour tout entier naturel  $n$ .  
 Faux       Vrai
- M57** Vrai ou faux? On peut affirmer que  $c_{n+1} \geq c_n + \frac{1}{2}$  pour tout entier naturel  $n$ .  
 Faux       Vrai
- M58** Vrai ou faux? On peut affirmer qu'il existe un entier  $n_0 \geq 0$  tel que  $c_{n+1} \geq c_n + \frac{3}{4}$  pour tout entier  $n \geq n_0$ .  
 Vrai       Faux
- M59** Vrai ou faux? On peut affirmer qu'il existe un entier  $n_0 \geq 0$  tel que  $c_{n+1} \geq c_n + \frac{1}{2}$  pour tout entier  $n \geq n_0$ .  
 Vrai       Faux
- R3** À l'aide des résultats (corrects) établis à ce stade, déterminer la limite de la suite  $(b_n)_{n \geq 0}$ .

## Exercice 7. Dérivées successives

Soit  $f$  une fonction de variable réelle, définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Pour un nombre entier naturel non nul  $n$ , on définit, lorsque c'est possible, la dérivée  $n$ -ième de  $f$  comme la fonction  $f^{(n)}$  obtenue au bout du procédé de construction par récurrence finie qui suit :

$$f^{(1)} = f' \quad \text{et} \quad f^{(k)} = (f^{(k-1)})' \quad \text{pour tout } k \text{ compris entre 2 et } n.$$

Par exemple, lorsque  $f^{(2)}$  est définie elle est égale à la dérivée seconde  $f''$  de  $f$ . La dérivée troisième de  $f$  est définie si et seulement si  $f''$  est définie et dérivable, auquel cas  $f^{(3)} = (f'')'$ . Et caetera.

- M60** La dérivée troisième de la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty, 1[$  par  $f(x) = 3 \ln(1 - x)$  est la fonction qui à  $x$  associe :

$\frac{-6}{(1-x)^3}$         $\frac{6}{(1-x)^2}$         $\frac{6}{(1-x)^3}$         $\frac{3}{(1-x)^3}$         $\frac{2}{(1-x)^3}$

**M61** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. La dérivée seconde de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^n$  est la fonction qui à  $x$  associe :

- A**  $n^2x^{n-2}$      **B**  $n(n+1)x^{n-2}$       $n(n-1)x^{n-2}$      **D**  $n^2x^{n-1}$      **E**  $(n^2-1)x^{n-2}$

**M62** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. La dérivée  $n$ -ième de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^n$  est la fonction qui à  $x$  associe :

- A**  $(n+1)!$      **B**  $n(n-2)!$      **C**  $(n-1)!x$      **D**  $0$       $n!$

**M63** Soit  $n$  un entier naturel. La dérivée  $(n+1)$ -ième de la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty, 1[$  par  $f(x) = -\ln(1-x)$  est la fonction qui à  $x$  associe :

- A**  $\frac{n!}{(1-x)^n}$      **B**  $\frac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}}$       $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$      **D**  $\frac{(-1)^n (n+1)!}{(1-x)^{n+1}}$      **E**  $\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+1}}$

### Fonctions polynomiales

On dit qu'une fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est **polynomiale de degré  $n$**  lorsqu'il existe des réels fixes  $a_0, \dots, a_n$ , avec  $a_n \neq 0$ , tels que  $g$  associe à tout réel  $x$  le réel  $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + \dots + a_nx^n$ . On convient également que la fonction identiquement nulle est polynomiale (mais sans degré). Par exemple, la fonction qui à  $x$  associe 2 est polynomiale de degré 0 ; la fonction qui à  $x$  associe  $4x^3 - x$  est polynomiale de degré 3.

**M64** Si  $g$  est polynomiale de degré  $n$  alors :

- $g^{(k)}$  est polynomiale de degré  $n - k$  pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$   
 **B**  $g^{(k)}$  est polynomiale de degré  $n + 1 - k$  pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n + 1$   
 **C**  $g^{(k)}$  est polynomiale de degré  $n - k$  pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n + 1$   
 **D** aucune des autres propositions indiquées n'est systématiquement vraie  
 **E**  $g^{(k)}$  est polynomiale de degré  $n + 1 - k$  pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$

**M65** La fonction exponentielle est-elle polynomiale ?

- Non     **B** Oui

**R4** Justifier la réponse à la question **M65** en s'appuyant sur le résultat de la question **M64**.

### Comptage de zéros

On admet que les trois résultats suivants valent pour toute fonction dérivable  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

- étant donné deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  et  $f(a) = f(b) = 0$ , la fonction  $f'$  s'annule au moins une fois dans l'intervalle  $]a, b[$ ;

- étant donné un réel  $a$  tel que  $f(a) = \lim_{+\infty} f = 0$ , la fonction  $f'$  s'annule au moins une fois dans l'intervalle  $]a, +\infty[$ ;
- étant donné un réel  $a$  tel que  $f(a) = \lim_{-\infty} f = 0$ , la fonction  $f'$  s'annule au moins une fois dans l'intervalle  $] -\infty, a[$ .

□ **M66** Soit  $f$  une fonction dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $p$  un entier naturel non nul. On suppose que  $f$  s'annule en au moins  $p$  nombres réels. Parmi les conclusions suivantes, laquelle est la plus forte que l'on puisse obtenir en général grâce aux résultats admis ?

- A** aucune des autres conclusions proposées n'est vraie
- B**  $f'$  s'annule en au moins  $p$  nombres réels
- C**  $f'$  s'annule en au moins  $p + 1$  nombres réels
- D**  $f'$  s'annule en au moins  $p - 1$  nombres réels

□ **M67** Soit  $f$  une fonction dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $p$  un entier naturel non nul. On suppose, pour un certain entier  $n > 0$ , que  $f$  admet une dérivée  $n$ -ième. On suppose enfin que  $f$  s'annule en au moins  $p$  nombres réels. Parmi les conclusions suivantes, laquelle est la plus forte que l'on puisse obtenir en général ?

- A**  $f^{(n)}$  s'annule en au moins  $p + n$  nombres réels
- B**  $f^{(n)}$  s'annule en au moins  $p$  nombres réels
- C**  $f^{(n)}$  s'annule en au moins  $p - n$  nombres réels
- D** aucune des autres conclusions proposées n'est vraie

△ **R5** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , supposée polynomiale de degré  $n > 0$ . En combinant plusieurs résultats antérieurs, démontrer brièvement que  $f$  s'annule en au plus  $n$  réels.

### Une suite particulière de polynômes

Dans cette dernière partie, on considère la fonction  $f$  qui à tout réel  $x$  associe  $f(x) = e^{-x^2}$ . On admet que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f^{(n)}$  est définie et qu'il existe une fonction polynomiale  $H_n$  telle que

$$f^{(n)}(x) = H_n(x) e^{-x^2} \quad \text{pour tout réel } x.$$

△ **L7** Donner une expression de  $H_{n+1}(x)$  en fonction de  $H_n$ .

□ **M68** Pour tout entier  $n \geq 1$ , la fonction  $H_n$  est polynomiale de degré :

- A**  $2n - 1$        **B**  $2^{n-1}$        **C**  $n$        **D**  $0$        **E** aucune des autres réponses proposées

On admet que  $f^{(n)}$  tend vers 0 en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , pour tout  $n \geq 1$ .

- M69** En appliquant par récurrence les principes admis avant la question **M66**, la conclusion la plus forte que l'on puisse en tirer est que, pour tout  $n \geq 1$  :
- A**  $f^{(n)}$  s'annule au moins  $2n$  fois
- $f^{(n)}$  s'annule au moins  $n$  fois
- C** aucune des autres propositions n'est vraie
- D**  $f^{(n)}$  s'annule au moins  $n - 1$  fois
- E**  $f^{(n)}$  s'annule au moins  $2^{n-1}$  fois
- M70** Au vu de tout ce qui précède, on peut conclure que :
- A**  $f^{(n)}$  s'annule exactement  $2^{n-1}$  fois
- B**  $f^{(n)}$  s'annule exactement  $2n - 1$  fois
- $f^{(n)}$  s'annule exactement  $n$  fois
- D** aucune des autres propositions n'est vraie
- E**  $f^{(n)}$  s'annule exactement  $n - 1$  fois

## Exercice 8. Géométrie plane

Dans tout l'exercice, dont les parties sont indépendantes les unes des autres, on se place dans un plan euclidien.

### Triangles

- M71** Soit  $a, b, c$  trois nombres réels strictement positifs. Pour qu'il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés sont  $a, b$  et  $c$ , il est nécessaire et suffisant que :
- A**  $c < b + a$  et  $b < a + c$
- $c < a + b$  si on suppose d'emblée que  $c \geq a$  et  $c \geq b$
- C** aucune des autres réponses proposées
- D**  $a < b + c$  et  $b < a + c$
- E**  $a < b < c$
- M72** Combien existe-t-il d'entiers  $n > 0$  tels qu'il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés soient  $\ln(12), \ln(75)$  et  $\ln(n)$ ?
- A** 93       **B** 900       **C** 94       **D** Une infinité       **E** 893

CORRECTION

□ **M73** Combien existe-t-il d'entiers  $n > 0$  tels qu'il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés soient  $\ln(12)$ ,  $\ln(54)$  et  $\ln(n)$ ?

**A** Une infinité

**B** 645

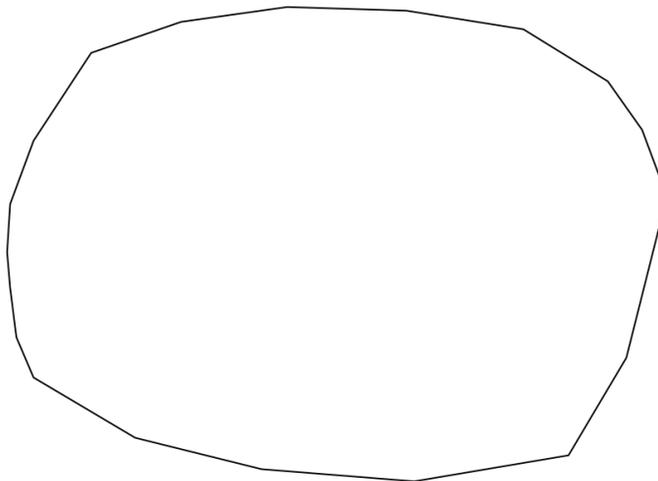
**C** 644

**D** 646

**E** 643

## Polygones

On se donne ici un polygone  $\mathcal{P}$  à 18 sommets. On le suppose convexe, c'est-à-dire que la mesure de n'importe lequel de ses angles intérieurs est inférieure à 180 degrés.



**M74** La moyenne des mesures des angles intérieurs au polygone  $\mathcal{P}$  vaut :

- A** 180 degrés     **B** 170 degrés     **C** 165 degrés     **D** 160 degrés     **E** 170 degrés

**M75** On suppose que les mesures des angles intérieurs à  $\mathcal{P}$  forment une suite arithmétique. Quelle valeur ne peut *pas* prendre la plus petite de ces mesures ?

- A** 130 degrés     **B** 145 degrés     **C** 150 degrés     **D** 155 degrés     **E** 159 degrés

**M76** On suppose que les mesures (calculées en degrés) des angles intérieurs à  $\mathcal{P}$  forment une suite arithmétique à termes entiers. Quelle valeur prend nécessairement la plus petite de ces mesures ?

- A** 146 degrés     **B** 147 degrés     **C** 143 degrés     **D** 145 degrés     **E** 144 degrés

## Figures

**L8** On considère un carré  $ABCD$ . Soit  $E$  un point de  $[A, D]$  et  $F$  un point de  $[B, C]$  tels que

$$BE = EF = FD = 30.$$

Que vaut l'aire du carré  $ABCD$  ?

**L9** On considère un carré  $ABCD$  de côté 5. Soit  $E$  et  $F$  deux points extérieurs au carré tels que  $BE = DF = 3$  et  $AE = CF = 4$ . Que vaut  $EF$  ?