TeSciA

2023

Mathématiques Générales Avancées

Épreuve 2, Option B

25 mars 2023

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ◯ ◯ ●

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

Exercice 1. Pot pourri de calcul algébrique

☐ **M1** Le nombre $2\sqrt{42} - 13$ est :

[A] positif ■ négatif

☐ **M2** Le nombre $\sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{8} - \sqrt{3}$ est :

■ positif [B] négatif

☐ **M3** Le nombre $\dfrac{\sqrt{6}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}$ est aussi égal à :

[A] $\sqrt{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ [B] $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ■ $6(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ [D] $6(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ [E] $\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

☐ **M4** On dispose d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 5 cm, et le périmètre 12 cm. L'aire de ce triangle est alors de :

■ $6\,\mathrm{cm}^2$ [B] aucune de ces réponses [C] $5\,\mathrm{cm}^2$ [D] $3\,\mathrm{cm}^2$ [E] $2\,\mathrm{cm}^2$

☐ **M5** On dispose d'un triangle équilatéral dont l'aire vaut $1\,\mathrm{cm}^2$. Le périmètre de ce triangle est alors de :

[A] $2\sqrt{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}$ [B] $\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$ [C] $6\,\mathrm{cm}$ [D] $2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ ■ $2\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}$

☐ **M6** Soit a, b, c trois réels vérifiant les égalités

$$\begin{cases} 2a + b + c = 2 \\ a + 2b + c = 4 \\ a + b + 2c = 6. \end{cases}$$

La somme $a + b + c$ vaut alors :

[A] 0 [B] 1 ■ 3 [D] 4 [E] 2

☐ **M7** Soit a et b deux réels tels que $a \geqslant |b|$. Le carré de $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$ vaut systématiquement :

[A] $2\,(|a| - |b|)$ [B] $2\,(a + b)$ [C] $-2\,(a + b)$ ■ $2\,(a + |b|)$ [E] $2\,(|a| + b)$

□ **M8**
L'ensemble des réels $x \neq 2$ vérifiant simultanément les inéquations $x(x^2-1) \geqslant 0$ et $\dfrac{x^2-(2x-3)^2}{2-x} \leqslant 0$ est :

- $\boxed{\text{A}}$ La réunion de deux intervalles disjoints de longueur 1, dont exactement un est un segment
- $\boxed{\text{B}}$ La réunion de deux intervalles disjoints de longueur 1, dont aucun n'est un segment
- $\boxed{\text{C}}$ La réunion de deux segments de longueur 2
- $\boxed{\text{D}}$ La réunion de deux intervalles disjoints de longueur 2, dont aucun n'est un segment
- $\boxed{\text{E}}$ La réunion de deux intervalles disjoints de longueur 2, dont exactement un est un segment

Note : une erreur involontaire a été commise, si bien qu'aucune des réponses proposées dans cette question n'était correcte. Le jury a donc décidé de neutraliser la question, tout réponse rapportant donc 0 *point.*

△ **L1** Donner sans justification les solutions réelles de l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$.

△ **L2** Donner sans justification les solutions réelles de l'équation

$$\left(\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\right)^3 + \left(\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\right)^2 + \left(\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\right) + 1 = 0.$$

◯ **R1** Soit n un entier naturel non nul. On considère les entiers

$$x = \underbrace{11\cdots1}_{2n \text{ chiffres}} \quad \text{et} \quad y = \underbrace{22\cdots2}_{n \text{ chiffres}}$$

Démontrer que $\sqrt{x-y}$ est un entier.

◯ **R2** Soit a, b et c trois réels positifs. Démontrer que l'un des réels $a\,(1-b)$, $b\,(1-c)$ et $c\,(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}\cdot$ *On pourra commencer par s'intéresser à* $x(1-x)$ *pour* x *réel.*

Exercice 2. Semi-inverses d'une fonction

Dans tout cet exercice, on se donne deux fonctions f et g, définies en tout réel et à valeurs réelles. On introduit quatre conditions :

- (f,g) vérifie $\mathcal{C}_1$ lorsque $g(f(x)) = x$ pour tout réel x.
- (f,g) vérifie $\mathcal{C}_2$ lorsque $f(g(y)) = y$ pour tout réel y.
- (f,g) vérifie $\mathcal{C}_3$ lorsque $f(g(f(x))) = f(x)$ pour tout réel x.
- (f,g) vérifie $\mathcal{C}_4$ lorsque $g(f(g(y))) = g(y)$ pour tout réel y.

Par exemple :

- lorsque $f(x) = \frac{x}{2}$ pour tout réel x, et $g(y) = 2y$ pour tout réel y, les conditions $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont évidemment vérifiées ;
- lorsque $f(x) = \frac{x}{2}$ pour tout réel x, et $g(y) = y + 1$ pour tout réel y, la condition $\mathcal{C}_1$ n'est pas vérifiée, car l'égalité $\frac{x}{2} + 1 = x$ ne vaut pas pour $x = 0$ (par exemple).

Pour un réel y, on pose $\operatorname{sgn}(y) = 1$ si $y \geqslant 0$, et $\operatorname{sgn}(y) = -1$ si $y < 0$.

On dit qu'une fonction est **constante** lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur.

On introduit enfin les cinq fonctions particulières f_1, f_2, g_1, g_2 et g_3 qui suivent :

- f_1 associe à tout réel x le réel $f_1(x) = e^x$;
- f_2 associe à tout réel x le réel $f_2(x) = x^2$;
- g_1 associe à tout réel y le réel $g_1(y) = \ln(y)$ si $y > 0$, et $g_1(y) = 0$ sinon ;
- g_2 associe à tout réel y le réel $g_2(y) = \sqrt{|y|}$;
- g_3 associe à tout réel y le réel $g_3(y) = \operatorname{sgn}(y) \cdot \sqrt{|y|}$. Par exemple, $g_3(-4) = -2$ et $g_3(9) = 3$.

Vrai ou faux ?

Dans les questions **M9** à **M27**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

☐ **M9** La condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée par le couple (f_1, g_1).

■ Vrai [B] Faux

☐ **M10** La condition $\mathcal{C}_2$ est vérifiée par le couple (f_1, g_1).

■ Faux [B] Vrai

☐ **M11** La condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

■ Faux [B] Vrai

☐ **M12** La condition $\mathcal{C}_2$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

■ Faux [B] Vrai

☐ **M13** La condition $\mathcal{C}_3$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

■ Vrai [B] Faux

☐ **M14** La condition $\mathcal{C}_4$ est vérifiée par le couple (f_2, g_2).

[A] Faux ■ Vrai

☐ **M15** La condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

■ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M16** La condition $\mathcal{C}_2$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

■ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M17** La condition $\mathcal{C}_3$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

$\boxed{\text{A}}$ Faux ■ Vrai

☐ **M18** La condition $\mathcal{C}_4$ est vérifiée par le couple (f_2, g_3).

$\boxed{\text{A}}$ Vrai ■ Faux

☐ **M19** Quel que soit le choix des fonctions f et g, si la condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée alors la condition $\mathcal{C}_2$ l'est aussi.

■ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M20** Quel que soit le choix des fonctions f et g, si les conditions $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont vérifiées alors la condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée.

■ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M21** Quel que soit le choix des fonctions f et g, si la condition $\mathcal{C}_1$ est vérifiée alors les conditions $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont vérifiées.

$\boxed{\text{A}}$ Faux ■ Vrai

☐ **M22** Si $\mathcal{C}_1$ est vérifiée alors f prend toutes les valeurs réelles possibles.

■ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M23** Si $\mathcal{C}_1$ est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors $\mathcal{C}_2$ est vérifiée.

$\boxed{\text{A}}$ Faux ■ Vrai

☐ **M24** Si $\mathcal{C}_3$ est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors $\mathcal{C}_1$ est vérifiée.

$\boxed{\text{A}}$ Vrai ■ Faux

☐ **M25** Si $\mathcal{C}_3$ est vérifiée et f prend toutes les valeurs réelles possibles alors $\mathcal{C}_2$ est vérifiée.

■ Vrai $\boxed{\text{B}}$ Faux

☐ **M26** Pour la fonction f qui à x associe $x+1$:

$\boxed{\text{A}}$ Il n'existe aucune fonction g telle que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

$\boxed{\text{B}}$ Il existe plusieurs fonctions g telles que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

■ Il existe exactement une fonction g tel que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

☐ **M27** Pour la fonction f qui à x associe $|x|$:

$\boxed{\text{A}}$ Il existe exactement une fonction g tel que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

$\boxed{\text{B}}$ Il existe plusieurs fonctions g telles que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

■ Il n'existe aucune fonction g telle que $\mathcal{C}_1$ soit vérifiée

△ **L3** On suppose que la fonction g est constante. Expliciter sans démonstration les fonctions f telles que $\mathcal{C}_3$ soit vérifiée.

◯ **R3** Démontrer que f est constante si et seulement si la propriété $\mathcal{C}_3$ est vérifiée quelle que soit la fonction g.

Suite itérée croisée

On fixe un réel a et l'on définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à termes réels en posant $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \begin{cases} g(u_n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(u_n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

☐ **M28** En supposant validée la condition $\mathcal{C}_2$, quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a, f et g, celle qui apporte l'information la plus précise ?

$\boxed{\text{A}}$ La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs

$\boxed{\text{B}}$ La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes

$\boxed{\text{C}}$ La suite u est constante

$\boxed{\text{D}}$ La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes

■ La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes

☐ **M29** En supposant validée la condition $\mathcal{C}_3$, quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a, f et g, celle qui apporte l'information la plus précise ?

$\boxed{\text{A}}$ La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes

$\boxed{\text{B}}$ La suite u prend au plus 5 valeurs distinctes

$\boxed{\text{C}}$ La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs

■ La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes

$\boxed{\text{E}}$ La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes

Correction

☐ **M30** En supposant validée la condition $\mathcal{C}_4$, quelle est, parmi celles des affirmations suivantes qui sont vraies indépendamment des choix de a, f et g, celle qui apporte l'information la plus précise ?

- $\boxed{\text{A}}$ La suite u prend au plus 5 valeurs distinctes
- $\boxed{\text{B}}$ La suite u prend au plus 2 valeurs distinctes
- ■ La suite u prend au plus 3 valeurs distinctes
- $\boxed{\text{D}}$ La suite u prend un nombre fini de valeurs ou une infinité de valeurs
- $\boxed{\text{E}}$ La suite u prend au plus 4 valeurs distinctes

Exercice 3. Étude d'une famille de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions :

$$h_n(x) = n!\,e^x - x^n \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{n!\,e^x - x^n}.$$

On note $\mathcal{D}_n$ le domaine de définition de la fonction f_n.

Domaine de définition

Pour commencer, raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour montrer la propriété :

$$\mathcal{H}_n \ : \ \text{« Pour tout } x \geqslant 0,\ h_n(x) > 0 \text{ »}$$

(A) Commençons par l'initialisation. La fonction $\exp$ est convexe donc sa courbe est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

(B) Cette tangente a pour équation $y = x + 1$ donc, pour tout $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant x + 1$ donc $h_1(x) \geqslant 1 > 0$. Ainsi $\mathcal{H}_1$ est vraie.

(C) Passons à l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. La fonction h_{n+1} est dérivable et, pour tout $x \geqslant 0$,

$$h'_{n+1}(x) = (n+1)!\,e^x - (n+1)x^n = (n+1)\,h_n(x).$$

(D) La propriété $\mathcal{H}_n$ étant vraie, on a, pour tout $x \geqslant 0$, $h_n(x) > 0$ donc $h'_{n+1}(x) > 0$ puisque $(n+1) > 0$. Donc h_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(E) La fonction h_{n+1} étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $x \geqslant 0$,

$$h_{n+1}(x) > h_{n+1}(0) = (n+1)! > 0.$$

Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence, on conclut alors que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

☐ **M31** L'étape (A) est entièrement correcte.

A Faux ■ Vrai

☐ **M32** L'étape (B) est entièrement correcte.

■ Vrai B Faux

☐ **M33** L'étape (C) est entièrement correcte.

A Faux ■ Vrai

☐ **M34** L'étape (D) est entièrement correcte.

[A] Faux ■ Vrai

☐ **M35** L'étape (E) est entièrement correcte.

■ Faux [B] Vrai

L'ensemble du raisonnement détaillé ci-dessus comporte peut-être des erreurs, mais sa conclusion est correcte et nous l'admettrons : la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

☐ **M36** La fonction h_n est strictement positive sur $\mathbb{R}$ lorsque n est impair.

[A] Faux ■ Vrai

☐ **M37** La fonction h_n est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ lorsque n est pair.

[A] Faux ■ Vrai

☐ **M38** Des résultats précédents on peut déduire que :

■ $\mathbb{R}_+ \subset \mathcal{D}_n$ [B] $\mathcal{D}_n \subset \mathbb{R}_+$ [C] $\mathcal{D}_n \subset \mathbb{R}_+^*$ [D] $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}$ [E] $\mathbb{R}_- \subset \mathcal{D}_n$

☐ **M39** Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'ensemble $\mathcal{D}_n$ est égal :

[A] à $\mathbb{R}$ si n est impair, et $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ si n est pair, pour un $\alpha < 0$ indépendant de n

[B] à $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_n\}$ pour un $\alpha_n < 0$ dépendant de n

■ à $\mathbb{R}$ si n est impair, et $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_n\}$ si n est pair, pour un $\alpha_n < 0$ dépendant de n

[D] à $\mathbb{R}$ si n est pair, et $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_n\}$ si n est impair, pour un $\alpha_n < 0$ dépendant de n

[E] à $\mathbb{R}$ si n est pair, et $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ si n est impair, pour un $\alpha < 0$ indépendant de n

Analyse des valeurs prises par f_n

☐ **M40** La limite de f_n en $+\infty$ est :

[A] -1 [B] $+\infty$ [C] elle dépend de n ■ 0 [E] $-\infty$

☐ **M41** La limite de f_n en $-\infty$ est :

[A] elle dépend de n ■ -1 [C] $+\infty$ [D] $-\infty$ [E] 0

Dans la suite, on introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel

$$\theta_n = \frac{n^n}{n!\, e^n - n^n}.$$

△ **L4** Expliciter, selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, les points d'annulation de la dérivée de f_n.

☐ **M42** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. L'ensemble des valeurs prises par la fonction f_n est :

A $]-\infty\,,-1[\cup]0\,,+\infty[$

B $]-\infty\,,-1[\cup[0\,,\theta_n]$

[redacted] $]-1\,,\theta_n]$

D $]-\infty\,,-1[\cup[0\,,+\infty[$

E $]-\infty\,,-1[\cup]0\,,\theta_n]$

☐ **M43** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair. L'ensemble des valeurs prises par la fonction f_n est :

A $]-1\,,\theta_n]$

B $]-\infty\,,-1[\cup]0\,,\theta_n]$

C $]-\infty\,,-1[\cup[0\,,\theta_n]$

D $]-\infty\,,-1[\cup]0\,,+\infty[$

[redacted] $]-\infty\,,-1[\cup[0\,,+\infty[$

Extrema

Une fonction h est dite **majorée** lorsqu'il existe un réel supérieur à toutes les valeurs prises par h, et **minorée** lorsqu'il existe un réel inférieur à toutes les valeurs prises par h.

On dit que h **admet un maximum** lorsqu'il existe un élément x_0 où h est définie et $h(x_0)$ est supérieur (ou égal) à toute valeur prise par h ; on dit que h **admet un minimum** lorsqu'il existe un élément x_0 où h est définie et $h(x_0)$ est inférieur (ou égal) à toute valeur prise par h.

☐ **M44** Sur $\mathcal{D}_n$, la fonction f_n est majorée :

A si n est pair, et seulement dans ce cas

[redacted] si n est impair, et seulement dans ce cas

C quelle que soit la valeur de n

D jamais

☐ **M45** Sur $\mathcal{D}_n$, la fonction f_n admet un maximum :

A quelle que soit la valeur de n

[redacted] si n est impair, et seulement dans ce cas

C si n est pair, et seulement dans ce cas

D jamais

☐ **M46** Sur $\mathcal{D}_n$, la fonction f_n est minorée :

A si n est pair, et seulement dans ce cas

B jamais

C quelle que soit la valeur de n

■ si n est impair, et seulement dans ce cas

☐ **M47** Sur $\mathcal{D}_n$, la fonction f_n admet un minimum :

■ jamais

B quelle que soit la valeur de n

C si n est pair, et seulement dans ce cas

D si n est impair, et seulement dans ce cas

Exercice 4. Ensembles bien ordonnés

Soit A un ensemble formé de nombres réels (autrement dit, une partie de $\mathbb{R}$).

- Un **plus petit élément** de A est un élément a de A tel que $a \leqslant x$ pour tout x dans A.
- Un **plus grand élément** de A est un élément b de A tel que $x \leqslant b$ pour tout x dans A.

On dit que A est **bien ordonné** lorsque toute partie non vide de A admet un plus petit élément. Par exemple :

- $\{0; 1\}$ est bien ordonné car ses parties non vides sont $\{0; 1\}$, $\{0\}$ et $\{1\}$, et chacune a un plus petit élément (respectivement : 0, 0 et 1) ;
- $\mathbb{N}$ est bien ordonné (cela doit être considéré comme évident) ;
- $[0; 1]$ n'est pas bien ordonné car, par exemple, $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ est dénué de plus petit élément bien que non vide.

On rappelle enfin qu'un ensemble est **fini** lorsqu'il n'a qu'une quantité finie d'éléments, et **infini** dans le cas contraire (par exemple, le segment $[0; 1]$ est infini).

△ **L5** Parmi les ensembles suivants, indiquer sans démonstration lesquels sont bien ordonnés :

$$\left\{0; 1; \sqrt{2}\right\}, \quad [0, +\infty[\,, \quad]0; 1]\,, \quad \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}.$$

☐ **M48** Une partie bien ordonnée et non vide de $\mathbb{R}$:

A peut n'avoir ni plus grand élément, ni plus petit élément

B admet nécessairement un plus grand élément, mais pas nécessairement un plus petit élément

C admet nécessairement un plus grand élément et un plus petit élément

■ admet nécessairement un plus petit élément, mais pas nécessairement un plus grand élément

Vrai ou faux ?

Dans les questions **M49** à **M54**, on demande d'évaluer la validité des affirmations indiquées.

☐ **M49** Toute partie finie de $\mathbb{R}$ est bien ordonnée.

[A] Faux [redacted] Vrai

☐ **M50** Toute partie bien ordonnée de $\mathbb{R}$ est finie.

[A] Vrai [redacted] Faux

☐ **M51** Tout sous-ensemble non vide d'un ensemble bien ordonné est bien ordonné.

[redacted] Vrai [B] Faux

☐ **M52** L'ensemble constitué des nombres de la forme $\dfrac{n-1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est bien ordonné.

[redacted] Vrai [B] Faux

☐ **M53** L'ensemble constitué des nombres de la forme $\dfrac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est bien ordonné.

[redacted] Faux [B] Vrai

☐ **M54** L'ensemble constitué des nombres de la forme $\dfrac{n^2+1}{2023\,n+\sin(n)+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$, est bien ordonné.

[A] Faux [redacted] Vrai

△ **R4** Justifier votre réponse à la question **M54**.

Exercice 5. Logique

Lorsque A et B sont deux propositions, on rappelle que « si A alors B » signifie que A est fausse ou A et B sont simultanément vraies.

Un groupe d'archéologues arrive devant une porte protégée par un mécanisme. Face à eux se trouvent trois leviers numérotés de 1 à 3. Chaque levier est levé ou baissé.

Au-dessus de chaque levier se trouve une affirmation :

- **Affirmation 1** : Le levier 2 est baissé et le levier 3 est levé.
- **Affirmation 2** : Si le levier 1 est levé alors le levier 3 est levé.
- **Affirmation 3** : Le levier 3 est levé et au moins l'un des autres est baissé.

☐ **M55** Quelle est la négation de l'affirmation 1 ?

■ Le levier 3 est baissé ou le levier 2 est levé

B Si le levier 2 est levé alors le levier 3 est baissé

C Le levier 2 est levé et le levier 3 est baissé

D Si le levier 3 est baissé alors le levier 2 est levé

☐ **M56** Quelle est la négation de l'affirmation 2 ?

A Si le levier 3 est baissé alors le levier 1 est levé

■ Le levier 1 est levé et le levier 3 est baissé

C Le levier 1 est baissé et le levier 3 est levé

D Si le levier 3 est levé alors le levier 1 est levé

E Si le levier 1 est levé alors le levier 3 est levé

☐ **M57** Quelle est la négation de l'affirmation 3 ?

A Le levier 3 est baissé et au moins l'un des autres est levé

B Le levier 3 est baissé et les deux autres sont levés

C Le levier 3 est baissé ou au moins l'un des autres est levé

■ Le levier 3 est baissé ou les deux autres sont levés

Pour les questions **M58** à **M60**, on suppose la proposition suivante vraie :

Proposition A : Les affirmations 1, 2 et 3 sont toutes vraies.

☐ **M58** Le levier 1 est-il levé ou baissé ?

A Baissé ■ Les deux sont possibles C Levé D La proposition A est absurde

☐ **M59** Le levier 2 est-il levé ou baissé ?

[A] Les deux sont possibles ■ Baissé [C] La proposition A est absurde [D] Levé

☐ **M60** Le levier 3 est-il levé ou baissé ?

[A] Baissé ■ Levé [C] La proposition A est absurde [D] Les deux sont possibles

Pour les questions **M61** à **M63**, on suppose la proposition suivante vraie :
Proposition B : Les affirmations 1, 2 et 3 sont toutes fausses.

☐ **M61** Le levier 1 est-il levé ou baissé ?

[A] La proposition B est absurde [B] Baissé [C] Les deux sont possibles ■ Levé

☐ **M62** Le levier 2 est-il levé ou baissé ?

[A] Levé [B] La proposition B est absurde [C] Baissé ■ Les deux sont possibles

☐ **M63** Le levier 3 est-il levé ou baissé ?

[A] La proposition B est absurde ■ Baissé [C] Levé [D] Les deux sont possibles

Pour les questions **M64** à **M66**, on suppose la proposition suivante vraie :
Proposition C : Exactement une des affirmations 1 à 3 est fausse.

☐ **M64** Le levier 1 est-il levé ou baissé ?

[A] La proposition C est absurde ■ Baissé [C] Les deux sont possibles [D] Levé

☐ **M65** Le levier 2 est-il levé ou baissé ?

■ Levé [B] La proposition C est absurde [C] Baissé [D] Les deux sont possibles

☐ **M66** Le levier 3 est-il levé ou baissé ?

[A] Les deux sont possibles ■ Levé [C] La proposition C est absurde [D] Baissé

Pour les questions **M67** à **M69**, on suppose la proposition suivante vraie :
Proposition D : Pour tout entier $i \in \{1, 2, 3\}$, l'affirmation i est vraie si et seulement si le levier i est levé.

☐ **M67** Le levier 1 est-il levé ou baissé ?

■ Baissé [B] La proposition D est absurde [C] Levé [D] Les deux sont possibles

☐ **M68** Le levier 2 est-il levé ou baissé ?

[A] Baissé [B] Les deux sont possibles ■ Levé [D] La proposition D est absurde

☐ **M69** Le levier 3 est-il levé ou baissé ?

[A] Baissé ■ Les deux sont possibles [C] La proposition D est absurde [D] Levé

Exercice 6. Nombre de distances entre n points du plan

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $E = \{P_1, \dots, P_n\}$ un ensemble constitué d'exactement n points du plan. On note D l'ensemble des distances entre ces points, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels $d > 0$ pour lesquels il existe deux points *distincts* P_i et P_j tels que $d = P_iP_j$. On note m le nombre d'éléments de D, appelé **nombre de distances** de E.

☐ **M70** On suppose dans cette question que $n = 3$. La plus petite valeur possible pour m est alors :

[A] 3 ■ 1 [C] 2 [D] 4 [E] 5

☐ **M71** Sachant que les points de E sont alignés ou sur un même demi-cercle, la plus petite valeur possible pour m est :

[A] $2n - 1$ [B] $2n + 1$ ■ $n - 1$ [D] $2n$ [E] n

△ **R5** Déterminer la plus grande valeur possible pour m sachant que les points de E sont alignés.

△ **L6** On suppose $4 \leqslant n \leqslant 5$. Donner sans démonstration la plus petite valeur possible pour m.

△ **L7** On suppose $n = 6$. Donner sans démonstration la plus petite valeur possible pour m.

☐ **M72** Vrai ou faux ? Si $n = 7$ et $m = 3$ alors E forme un polygone régulier à 7 sommets.

[A] Vrai ■ Faux

☐ **M73** L'affirmation « dès que des points de E sont à même distance de P_1, ces points sont sur un même demi-cercle de centre P_1 » :

■ est vraie si P_1P_2 est le plus grand élément de D, mais peut tomber en défaut sinon

[B] est toujours vraie

[C] peut être fausse même si P_1P_2 est le plus grand élément de D

On note k le plus grand nombre possible de points de E que l'on puisse placer sur un même cercle de centre P_1. On note ℓ le nombre de réels distincts parmi $P_1P_2, P_1P_3, \ldots, P_1P_n$.

△ **L8** Donner un réel a, en fonction de n et k et le plus grand possible, tel que $\ell \geqslant a$.

On suppose, en vue de la dernière question, que P_1P_2 est le plus grand élément de D.

☐ **M74** En combinant les minorations de m déduites des questions **M71** et **L8**, et en examinant les valeurs possibles pour k, l'inégalité la plus fine que l'on puisse obtenir est :

A $m \geqslant \dfrac{n}{2}$ ■ $m \geqslant \sqrt{n}$ C $m \geqslant \sqrt{n} - 1$ D $m \geqslant \dfrac{n}{4}$ E $m \geqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{n}$
