TeSciA

2024

Mathématiques Générales Avancées

Épreuve 2, Option B

16 mars 2024

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ◯ ◯ ⬤

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

TeSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).
Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.

AORES

Exercice 1. Logique : schémas de récurrence

Dans tout l'exercice, on considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geqslant 0$.

On dit qu'elle est **universelle** lorsque $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Par exemple, lorsque $\mathcal{P}(n)$ est la propriété « $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ », elle est universelle, et lorsque $\mathcal{P}(n)$ est la propriété « $(n+1)^2 = n^2 + 1$ » elle ne l'est pas (étant fausse pour $n = 1$, par exemple).

On s'intéresse à des propriétés définies formellement à partir de $\mathcal{P}(n)$ qui, lorsqu'elles sont vraies, assurent que $\mathcal{P}(n)$ est universelle.

Dans toutes les questions de l'exercice, on demande de dire si l'affirmation est vraie (quel que soit le choix de la propriété $\mathcal{P}(n)$), fausse (pour au moins une propriété $\mathcal{P}(n)$), ou n'a pas de sens logique.

☐ **M1** Si $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est universelle.

A Faux B Non sens C Vrai

☐ **M2** Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est universelle.

A Faux B Non sens C Vrai

☐ **M3** Si $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est universelle.

A Non sens B Vrai C Faux

☐ **M4** Si $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathcal{P}(n)$ est universelle.

A Vrai B Faux C Non sens

☐ **M5** Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(2n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est universelle.

A Non sens B Faux C Vrai

☐ **M6** Si d'une part $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, et d'autre part $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(2n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est universelle.

A Faux B Vrai C Non sens

☐ **M7** Si d'une part $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et d'autre part $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(2n)$ et $\mathcal{P}(2n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est universelle.

A Non sens B Vrai C Faux

☐ **M8** Si d'une part $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, et d'autre part $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(2n)$ et $\mathcal{P}(3n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est universelle.

A Non sens B Faux C Vrai

△ **L1** Donner, sans justifier votre réponse, le plus petit ensemble d'entiers naturels A pour lequel ajouter l'hypothèse « $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans A » à l'hypothèse « pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(2n)$ » suffit à assurer que $\mathcal{P}(n)$ est universelle.

Exercice 2. Produit de convolution de deux suites

Dans tout l'exercice, on appelle suite réelle toute suite à termes réels définie à partir du rang 0.

Pour deux suites réelles u et v, on note $u = v$ pour signifier que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lorsque a désigne un nombre réel, on note $\widetilde{a}$ la suite réelle dont tous les termes sont égaux à a, autrement dit $\widetilde{a}_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier $\widetilde{0}$ a tous ses termes nuls, et est appelée la **suite nulle**.

On note e la suite réelle définie par $e_0 = 1$ et $e_n = 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Lorsque $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent deux suites réelles, on définit une nouvelle suite réelle, notée $u \star v$ et appelée produit de convolution de u et v, en posant

$$(u\star v)_0 = u_0v_0 \qquad , \qquad (u\star v)_1 = u_1v_0 + u_0v_1 \qquad , \qquad (u\star v)_2 = u_2v_0 + u_1v_1 + u_0v_2$$

$$\cdots$$

$$(u\star v)_n = u_nv_0 + u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \cdots + u_1v_{n-1} + u_0v_n \qquad \text{etc.}$$

△ **L2** On considère la suite u définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 2$ et $u_n = 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Donner la valeur de $(u\star u)_3$.

☐ **M9** On considère la suite u définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 2$ et $u_n = 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Alors $(u\star u)_{10}$ vaut :

[A] 18 [B] 19 [C] 12 [D] 29 [E] 28

Vrai ou faux ?

Dans les questions **M11** à **M14**, on demande d'évaluer la validité des propositions indiquées.

☐ **M10** On a $u \star \widetilde{0} = \widetilde{0}$ pour toute suite réelle u.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M11** On a $u \star \widetilde{1} = u$ pour toute suite réelle u.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M12** On a $u \star e = u$ pour toute suite réelle u.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M13** On a $u \star v = v \star u$ quelles que soient les suites réelles u et v.

A Faux B Vrai

☐ **M14** On considère la suite réelle w définie par $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_n = 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2$. Pour toute suite réelle u et tout entier naturel n :

A $(u \star w)_n = u_{n+1}$

B $(u \star w)_n = u_{n-1}$

C aucune des autres réponses proposées n'est vraie en toute généralité

D $(u \star w)_{n+1} = u_n$

☐ **M15** On considère la suite réelle u définie par $u_n = 1$ si n est pair, et $u_n = 0$ si n est impair ; on considère aussi la suite réelle v définie par $v_n = 0$ si n est pair, et $v_n = 1$ si n est impair. Pour tout entier naturel n :

A $(u \star v)_n = (n-1)/2$ si n est impair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est pair

B $(u \star v)_n = (n+1)/2$ si n est impair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est pair

C $(u \star v)_n = n/2$ si n est pair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est impair

D $(u \star v)_n = (n+2)/2$ si n est pair, et $(u \star v)_n = 0$ si n est impair

E aucune des autres réponses proposées n'est vraie en toute généralité

Suites arithmétiques/géométriques

Dans les questions **M17** à **M21**, on fixe deux suites réelles u et v. On rappelle que toute suite constante est arithmétique (de raison 0).

☐ **M16** Si u et v sont constantes, alors $u \star v$:

A est géométrique

B est arithmétique

C peut n'être ni arithmétique ni géométrique, selon le choix de u et v

☐ **M17** Si u et v sont arithmétiques alors $u \star v$:

A n'est jamais arithmétique

B est arithmétique

C peut être arithmétique ou non, selon le choix de u et v

△ **L3** On suppose u géométrique de raison 2 et v géométrique de raison 4. Donner une expression simplifiée de $(u \star v)_n$ en fonction de n, u_0 et v_0.

☐ **M18** Si u et v sont géométriques de raisons non nulles différentes, et si $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$, alors $u \star v$:

A n'est jamais géométrique

B peut être géométrique ou non, selon les valeurs respectives de u et v

C est géométrique

☐ **M19** Si u et v sont géométriques de raisons non nulles différentes, et si $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$, alors $u \star v$:

A est la somme de deux suites géométriques

B n'est jamais la somme de deux suites géométriques

C peut être la somme de deux suites géométriques ou non, selon les valeurs respectives de u et v

◯ **R1** Justifier votre réponse à la question **M19**.

☐ **M20** Si u et v sont géométriques et de raisons différentes de 0 et 1, alors $u \star v$:

A peut être arithmétique ou non, selon les valeurs respectives de u et v

B n'est jamais arithmétique

C est arithmétique

Valuation, résolution d'équations

Soit u une suite réelle différente de $\widetilde{0}$. Il existe donc un entier $n \geqslant 0$ tel que $u_n \neq 0$, et on note $\alpha(u)$ le plus petit de ces entiers, appelé **valuation** de u. Par exemple, pour une suite u vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = -4$ et $u_3 = 9$, on a $\alpha(u) = 2$.

☐ **M21** Soit u et v deux suites réelles différentes de $\widetilde{0}$. On note p la valuation de u, et q celle de v. On note m le plus petit des entiers p et q, et M le plus grand d'entre eux. On peut alors affirmer :

A que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < pq$, mais que $(u \star v)_{pq} \neq 0$

B que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < M$, mais que $(u \star v)_M \neq 0$

C qu'aucune des autres affirmations n'est systématiquement vraie

D que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < p + q$, mais que $(u \star v)_{p+q} \neq 0$

E que $(u \star v)_n = 0$ pour tout entier naturel $n < m$, mais que $(u \star v)_m \neq 0$

☐ **M22** Soit u et v deux suites différentes de la suite nulle. On peut alors affirmer :

A que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est le plus petit des entiers $\alpha(u)$ et $\alpha(v)$

B qu'aucune des autres affirmations n'est systématiquement vraie

C que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est $\alpha(u)\alpha(v)$

D que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est le plus grand des entiers $\alpha(u)$ et $\alpha(v)$

E que $u \star v$ n'est pas la suite nulle, et que sa valuation est $\alpha(u) + \alpha(v)$

☐ **M23** Soit b une suite réelle. S'il existe une suite réelle u telle que $u \star b = e$, alors la conséquence la plus précise que l'on puisse en tirer est :

A $b_0 \neq 0$

B aucune des autres affirmations n'est vraie en toute généralité

C $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

D il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n \neq 0$

E $b_1 \neq 0$

☐ **M24** On fixe deux suites réelles b et c telles que $b_0 \neq 0$. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est :

A aucune des autres affirmations ne peut être soutenue

B il existe plusieurs suites réelles u telles que $u \star b = c$

C il n'existe aucune suite réelle u telle que $u \star b = c$

D il existe une et une seule suite réelle u telle que $u \star b = c$

E il existe au moins une suite réelle u telle que $u \star b = c$

◯ **R2** Justifier votre réponse à la question précédente.

☐ **M25** Soit b une suite réelle non nulle. S'il existe une suite réelle u telle que $u \star u = b$, alors :

A on peut affirmer que la valuation de u est impaire

B on peut affirmer que la valuation de b est paire

C aucune des autres affirmations ne peut être soutenue

D on peut affirmer que la valuation de b est impaire

E on peut affirmer que la valuation de u est paire

☐ **M26** Soit b une suite réelle telle que $b_0 > 0$. On peut alors affirmer :

A qu'aucune des autres affirmations ne peut être soutenue

B qu'il existe exactement une suite réelle u telle que $u \star u = b$

C qu'il existe une infinité de suites réelles u telles que $u \star u = b$

D qu'il n'existe aucune suite réelle u telle que $u \star u = b$

E qu'il existe exactement deux suites réelles u telles que $u \star u = b$

Exercice 3. Suites réelles

On admet que les formules suivantes sont valables quels que soient les réels x et y :

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \text{et} \quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

On admet de plus l'inégalité :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|\,.$$

☐ **M27** Soit x et y deux nombres réels. En résolvant le système $\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$ d'inconnues u et v, on obtient l'identité :

A $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2})$

B $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x+y}{2})$

C $\sin(x) - \sin(y) = -2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$

D $\sin(x) - \sin(y) = -2\cos(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2})$

E $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$

☐ **M28** Soit x et y deux nombres réels. Parmi celles des inégalités suivantes qui sont vraies (quel que soit le choix de x et y), la plus précise est :

A $|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x-y|$

B $|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant \frac{1}{2}$

C $|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x+y|$

D $|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant 2\,|x-y|$

E $|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x-y|$

Dans toute la suite, pour une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels, on considère la suite $\Delta u = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple, si $u_n = n^2$ pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Dans les questions **M29**, **M30** et **M31**, on examine quelques cas particuliers.

☐ **M29** On suppose que $u_n = \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite Δu :

A n'a pas de limite

B a pour limite 0

C a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

D a pour limite $\dfrac{1}{2}$

E a pour limite $+\infty$

☐ **M30** On donne l'identité $y^3 - x^3 = (y-x)(y^2+xy+x^2)$ pour tous réels x et y. Pour $u = ((\sqrt{n})^3)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite Δu :

A a pour limite 1

B a pour limite $\dfrac{3\sqrt{n}}{2}$

C a pour limite 0

D n'a pas de limite

E a pour limite $+\infty$

☐ **M31** Lorsque $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite Δu :

A n'a pas de limite

B a pour limite 1

C a pour limite 2

D a pour limite 0

E a pour limite $\dfrac{\pi}{4}$

☐ **M32** On revient au cas général d'une suite u de nombres réels. On suppose que Δu est bornée (autrement dit, majorée et minorée). L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est alors que :

- $\boxed{\text{A}}$ la suite u est convergente
- $\boxed{\text{B}}$ la suite u est majorée
- $\boxed{\text{C}}$ la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ est majorée
- $\boxed{\text{D}}$ aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
- $\boxed{\text{E}}$ la suite u a tous ses termes positifs

◯ **R3** Justifier votre réponse à la question **M32**.

☐ **M33** Lorsque $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u :

- $\boxed{\text{A}}$ a pour limite $\sin(\sqrt{\pi})$
- $\boxed{\text{B}}$ a pour limite 1
- $\boxed{\text{C}}$ a pour limite 0
- $\boxed{\text{D}}$ a pour limite -1
- $\boxed{\text{E}}$ n'a pas de limite

☐ **M34** On revient au cas général d'une suite u de nombres réels. Sachant que Δu converge vers 0 et que u est bornée, l'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est que :

- $\boxed{\text{A}}$ aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
- $\boxed{\text{B}}$ u n'a pas de limite finie
- $\boxed{\text{C}}$ u converge vers 0
- $\boxed{\text{D}}$ u converge vers 1
- $\boxed{\text{E}}$ il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \geqslant 0$

☐ **M35** On suppose qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 0$ et un réel $a > 0$ tels que $u_{n+1} - u_n \geqslant a$ pour tout entier $n \geqslant n_0$. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est alors :

- $\boxed{\text{A}}$ u a pour limite na
- $\boxed{\text{B}}$ aucune des affirmations indiquées ne peut être soutenue
- $\boxed{\text{C}}$ dans certains cas la suite u converge, dans d'autres elle diverge
- $\boxed{\text{D}}$ u tend vers $+\infty$
- $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{u_n}{n}$ tend vers a quand n tend vers $+\infty$

☐ **M36** On suppose que $u_{n+1} - u_n \geqslant n$ pour tout entier naturel n. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est alors :

- $\boxed{\text{A}}$ la suite u tend vers $+\infty$
- $\boxed{\text{B}}$ la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n^2}$ converge vers 1
- $\boxed{\text{C}}$ la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n^2}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$
- $\boxed{\text{D}}$ la suite u tend vers $\dfrac{n^2}{2}$
- $\boxed{\text{E}}$ la suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ tend vers $+\infty$

☐ **M37** On suppose que $u_0 \geqslant 0$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \geqslant 2^n$ pour tout entier naturel n. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est alors :

- A la suite de terme général $\frac{u_n}{2^{n+1}}$ tend vers $+\infty$
- B aucune des autres affirmations ne peut être soutenue
- C on a $\frac{u_n}{2^{n+1}} \geqslant \frac{1}{4}$ pour tout entier $n \geqslant 0$
- D on a $\frac{u_n}{2^{n+1}} \geqslant \frac{1}{4}$ pour tout entier $n \geqslant 1$
- E la suite de terme général $\frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge vers 1

☐ **M38** Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable et telle que la dérivée seconde f'' soit positive. L'affirmation « pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $f(n+1) + f(n-1) - 2f(n) \geqslant 0$ » :

- A est vraie quelle que soit la fonction f vérifiant les hypothèses
- B est fausse quelle que soit la fonction f vérifiant les hypothèses
- C peut être vraie ou fausse, selon la fonction f vérifiant les hypothèses

Suites convexes

On dit que la suite u est **convexe** lorsque la suite Δu est croissante. Par exemple, la suite $u = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe car Δu est constante (donc croissante). On rappelle que toute suite constante est arithmétique (de raison 0).

△ **L4** Préciser (par simple référence aux numéros), dans quels cas la suite u est convexe :

(1) $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(2) $u_n = (\ln(n+1))^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(3) $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(4) $u_n = e^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(5) $u_n = \frac{1-n}{1+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☐ **M39** On suppose que les suites u et $-u$ sont convexes. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est alors que la suite u est :

A arithmétique B décroissante C croissante D constante E géométrique

☐ **M40** Si u est convexe et il existe un entier naturel n tel que $u_{n+1} - u_n > 0$, alors :

- A aucune des autres affirmations n'est vraie en toute généralité
- B u tend vers $+\infty$
- C u est convergente
- D u est strictement décroissante puis strictement croissante

☐ **M41** Si u est convexe et bornée alors la suite Δu :

A tend vers $+\infty$

B aucune des autres affirmations n'est vraie en toute généralité

C converge vers une limite non nulle

D converge vers 0

E n'a pas de limite (finie ou non)

☐ **M42** On suppose que u est convexe et bornée. L'affirmation la plus précise que l'on puisse soutenir est alors que :

A u est décroissante et convergente

B u est croissante et convergente

C u est négative

D u est positive

E u est convergente

Exercice 4. Systèmes de Steiner

On définit la terminologie suivante :

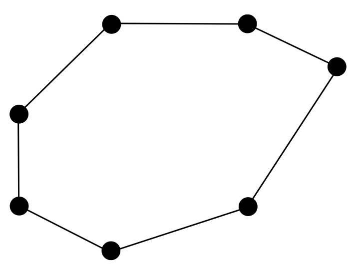
- Une **paire** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E possédant exactement deux éléments. Par exemple, les ensembles $\{1;3\}$ et $\{2;4\}$ sont des paires de l'ensemble $\{1;2;3;4;5\}$. On rappelle que les ensembles $\{3;1\}$ et $\{1;3\}$ sont identiques puisqu'ils ont les mêmes éléments.
- Un **triplet** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E possédant exactement trois éléments. Par exemple $\{1;2;4\}$ est un triplet de $\{1;2;3;4;5\}$, égal au triplet $\{4;2;1\}$, au triplet $\{1;4;2\}$ etc.
- Une paire est dite **incluse** dans un triplet lorsque tout élément de la paire est aussi un élément du triplet. Par exemple $\{1;4\}$ est incluse dans $\{1;2;4\}$ (les éléments 1 et 4 sont tous deux dans $\{1;2;4\}$), mais $\{1;5\}$ n'est pas incluse dans $\{1;2;4\}$ car 5 appartient à $\{1;5\}$ mais pas à $\{1;2;4\}$.

Dans tout l'exercice, on note E_n l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n, autrement dit

$$E_n = \{1;2;\ldots;n\}.$$

Un peu de dénombrement

Dans les questions **M43**, **M44** et **M45**, on considère les 7 sommets d'un heptagone convexe.



☐ **M43** Le nombre de paires de sommets de l'heptagone est :

A 14 B 42 C 21 D 13 E aucune des autres réponses proposées

☐ **M44** Le nombre de paires de sommets de l'heptagone qui ne sont pas côte-à-côte est :

A aucune des autres réponses proposées B 11 C 12 D 14 E 28

☐ **M45** Le nombre total de triangles que l'on peut former sur des sommets de l'heptagone et qui n'ont pas de côté commun avec l'heptagone est :

A 7 B 21 C 2 D 3 E aucune des autres réponses proposées

☐ **M46** Soit un entier naturel $n \geq 3$. Le nombre de paires de E_n et le nombre de triplets de E_n sont respectivement égaux à :

A 2^{n-1} et 2^{n-2}

B $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

C $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

D $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}$

E $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

△ **L5** Donner tous les entiers $n \geqslant 3$ tels que E_n ait autant de paires que de triplets.

Introduction aux systèmes de Steiner

On considère dans la suite un ensemble fini E. Un **système de Steiner** sur E est un ensemble T tel que :

(i) Les ***éléments*** de T sont des triplets de E.

(ii) Toute paire $\{i; j\}$ de E est incluse dans un et un seul élément de T.

Par exemple, pour $E = \{1; 2; 3\}$:

- l'ensemble T formé de $\{1; 2; 3\}$ et $\{1; 2\}$ n'est pas un système de Steiner car il n'est pas exclusivement constitué de triplets (l'objet $\{1; 2\}$ de T n'est pas un triplet) ;
- l'ensemble T formé du seul triplet $\{1; 2; 3\}$ est bien un système de Steiner. En effet, $\{1; 2; 3\}$ est bien un triplet, et toute paire de $\{1; 2; 3\}$ est incluse dans $\{1; 2; 3\}$, qui est le seul élément de T.

Autre exemple, sur $E_4 = \{1; 2; 3; 4\}$, l'ensemble T formé des quatre triplets $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 2; 4\}$, $\{2; 3; 4\}$ et $\{1; 3; 4\}$ n'est pas un système de Steiner : bien que toute paire de E_4 soit incluse dans l'un de ses éléments (ce que l'on vérifie facilement), la paire $\{1; 2\}$ est incluse dans plusieurs éléments de T.

☐ **M47** Sur E_4, l'ensemble T formé du seul triplet $\{1;2;3\}$:

A n'est pas un système de Steiner car T n'est pas constitué uniquement de triplets

B n'est pas un système de Steiner car n'importe quelle paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T

C n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 n'est incluse dans aucun élément de T

D est un système de Steiner

E n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T

☐ **M48** Sur E_4, l'ensemble T formé des triplets $\{1;2;3\}$, $\{1;2;4\}$ et $\{2;3;4\}$:

A n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 n'est incluse dans aucun élément de T

B n'est pas un système de Steiner car T n'est pas constitué uniquement de triplets

C est un système de Steiner

D n'est pas un système de Steiner car au moins une paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T

E n'est pas un système de Steiner car n'importe quelle paire de E_4 est incluse dans plusieurs éléments de T

Vrai ou faux ?

☐ **M49** Il existe un et un seul système de Steiner sur E_3.

A Vrai B Faux

☐ **M50** Il existe un système de Steiner sur E_4.

A Faux B Vrai

☐ **M51** Il existe un système de Steiner sur E_5.

A Faux B Vrai

◯ **R4** Justifier votre réponse à la question **M51**.

☐ **M52** Pour obtenir un système de Steiner sur E_7, quels triplets adjoindre aux triplets $\{1;2;3\}, \{1;6;7\}, \{2;4;6\}, \{3;4;7\}$ et $\{3;5;6\}$?

A $\{2;5;7\}$ et $\{1;4;5\}$

B aucune des autres réponses proposées ne convient

C $\{2;5;6\}$ et $\{1;4;7\}$

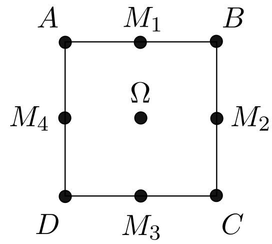
D $\{2;5;7\}$ et $\{1;5;6\}$

E $\{2;4;5\}$ et $\{1;5;7\}$

Une construction sur un carré

On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère orthonormal.

On considère un carré représenté par le dessin suivant :



On note E l'ensemble constitué des sommets du carré, des milieux des côtés, et du centre du carré. Ces points sont représentés par des pastilles • sur le dessin.

On forme :

- l'ensemble T_c des triplets constitués de trois points de E alignés sur une droite parallèle à l'un des côtés du carré ;
- l'ensemble T_d constitués des deux diagonales $\{A; \Omega; C\}$ et $\{B; \Omega; D\}$.

On réunit ces deux ensembles de triplets pour former un ensemble T.

☐ **M53** L'ensemble T n'est pas un système de Steiner sur E parce que :

$\boxed{\text{A}}$ au moins une paire de E est incluse dans plusieurs éléments de T

$\boxed{\text{B}}$ au moins une paire de E n'est incluse dans aucun élément de T

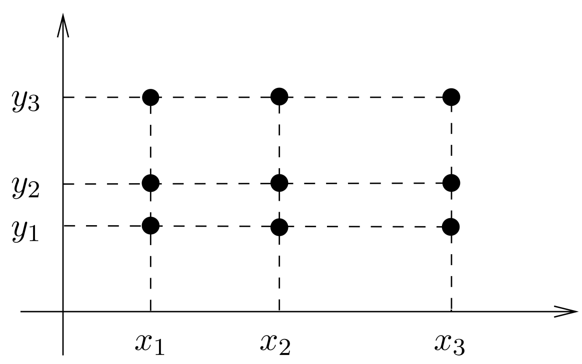
$\boxed{\text{C}}$ T n'est pas constitué uniquement de triplets

$\boxed{\text{D}}$ n'importe quelle paire de E sont incluses dans plusieurs éléments de T

△ **L6** Quels triplets rajouter à T pour obtenir un système de Steiner sur E ?

On obtient ainsi plus généralement la construction suivante : étant donné deux triplets $A = \{x_1; x_2; x_3\}$ et $B = \{y_1; y_2; y_3\}$ de nombres, on considère l'ensemble E des points du plan dont l'abscisse est dans A, et l'ordonnée dans B. Alors E possède un système de Steiner, et mieux il existe un système de Steiner sur E contenant, *entre autres* :

- tous les triplets de points de E alignés sur une même droite horizontale ;
- tous les triplets de points de E alignés sur une même droite verticale.



☐ **M54** Ce qui précède permet d'affirmer :

$\boxed{\text{A}}$ qu'aucun ensemble fini de cardinal 9 ne possède de système de Steiner

$\boxed{\text{B}}$ que tout ensemble fini de cardinal 9 possède un système de Steiner

$\boxed{\text{C}}$ que certains ensembles finis de cardinal 9 possèdent un système de Steiner, mais peut-être pas tous

$\boxed{\text{D}}$ qu'aucune des autres affirmations n'est vraie

Une idée séduisante

Pour une certaine valeur de l'entier $n \geqslant 6$, Jean-Pascal cherche à construire un système de Steiner sur E_n. On suppose qu'il a déjà réussi :

- à partager E_n en deux sous-ensembles A et B, tous deux non vides, et sans élément commun ;
- à construire, avec quelque effort, un système de Steiner T sur A et un système de Steiner T' sur B.

Il réunit les deux systèmes, c'est-à-dire qu'il prend tous les triplets qui sont soit dans T soit dans T'. Il obtient ainsi un ensemble $T \cup T'$ de triplets de E_n.

☐ **M55** L'ensemble $T \cup T'$ n'est pas un système de Steiner sur E_n parce que :

[A] au moins une paire de E_n n'est incluse dans aucun élément de $T \cup T'$

[B] $T \cup T'$ n'est pas constitué uniquement de triplets

[C] au moins une paire de E_n est incluse dans plusieurs éléments de $T \cup T'$

[D] toutes les paires de E_n sont incluses dans plusieurs éléments de $T \cup T'$

Jean-Pascal a bien compris que sa construction n'est pas suffisante. Il va donc tenter de la modifier, soit en retirant des triplets à $T \cup T'$, soit en rajoutant des triplets à $T \cup T'$.

☐ **M56** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

[A] Il est possible, pour au moins un jeu de données n, A, B, T, T', d'obtenir un système de Steiner sur E_n à partir de $T \cup T'$ en retirant certains triplets bien choisis

[B] Il est possible, pour au moins un jeu de données n, A, B, T, T', d'obtenir un système de Steiner sur E_n à partir de $T \cup T'$ en rajoutant certains triplets bien choisis

[C] Aucune des autres réponses n'est correcte

△ **R5** Justifier votre réponse à la question **M56**.

Une autre idée séduisante

Jean-Pascal considère maintenant la situation suivante. Il prend deux entiers naturels $n \geqslant 3$ et $p \geqslant 3$ pour lesquels il a réussi à construire un système de Steiner T_n sur E_n et un système de Steiner T_p sur E_p. Il considère l'ensemble F des points du plan dont l'abscisse x est dans E_n et l'ordonnée y dans E_p. Il espère construire un système de Steiner sur F.

☐ **M57** Si Jean-Pascal parvient à ses fins, il saura qu'il existe un système de Steiner sur E_N pour N égal à :

[A] p^n [B] np [C] $n+p$ [D] aucun des autres nombres indiqués, en général [E] n^p

Jean-Pascal regroupe alors tous les triplets suivants :

(i) ceux qui sont formés de trois points ayant la même abscisse, et les ordonnées appartiennent à un même triplet du système de Steiner T_p ;

(ii) ceux qui sont formés de trois points ayant la même ordonnée, et les abscisses appartiennent à un même triplet du système de Steiner T_n ;

(iii) enfin, pour chaque triplet A dans T_n et chaque triplet B dans T_p, il prend tous les triplets d'un système de Steiner décrit à partir de A et B entre les questions **L6** et **M54**.

Il forme ainsi un ensemble de triplets qu'il note T. Jean-Pascal prétend alors que T est un système de Steiner sur F. Voici son raisonnement :

Soit $\{M, N\}$ une paire de F. Étape 1 : les points M et N sont différents, donc leurs coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ vérifient $x \neq x'$ et $y \neq y'$. Étape 2 : Puisque $\{x; x'\}$ est une paire de E_n, on la rentre dans un unique triplet A du système T_n. Étape 3 : Puisque $\{y; y'\}$ est une paire de E_p, on la rentre dans un unique triplet B du système T_p. Étape 4 : La paire $\{M; N\}$ est alors incluse dans un unique triplet construit à partir de A et B (point (iii) ci-dessus). Étape 5 : La paire $\{M; N\}$ est alors incluse dans un unique élément du système T.

Chacune de ces étapes, *en admettant la validité des précédentes*, est soit juste, soit fausse car présente une erreur logique, soit incomplète car une affirmation est vraie bien qu'elle ne découle pas évidemment de la situation.

☐ **M58** L'étape 1 est :

A fausse   B juste   C incomplète

☐ **M59** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 2 est :

A juste   B fausse   C incomplète

☐ **M60** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 3 est :

A fausse   B incomplète   C juste

☐ **M61** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 4 est :

A incomplète   B juste   C fausse

☐ **M62** En admettant la validité des étapes précédentes, l'étape 5 est :

A juste   B fausse   C incomplète

Une question de cardinal

On suppose dans cette partie que E_n possède un système de Steiner T.

☐ **M63** Le nombre de paires de E_n qui contiennent 1 et le nombre de triplets dans T qui contiennent 1 sont respectivement égaux à :

A $n-1$ et $\dfrac{n+2}{3}$ B n et $\dfrac{n-1}{2}$ C $n-1$ et $\dfrac{n+1}{3}$

D aucune des autres réponses proposées, en général   E $n-1$ et $\dfrac{n-1}{2}$

☐ **M64** Le nombre de triplets qui composent le système de Steiner T vaut :

A $\dfrac{n-1}{2}$ B $\dfrac{n+1}{2}$ C $\dfrac{n(n-1)}{6}$ D $\dfrac{n+2}{3}$ E $n-1$

△ **L7** Parmi les entiers p tels que $3 \leqslant p \leqslant 10$, préciser ceux pour lesquels E_p possède un système de Steiner.