

Nom et Prénom :

Code Sujet :

☐ ☐ ☐

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

☐ TESCIA FEUILLE-RÉPONSE ÉPREUVE 2, OPTION A ☐

R1 Les calculs précédents montrent que $A = \sqrt{2} e^{7i\pi/12}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n \in \mathbb{Z}$. Alors $(\sqrt{2})^n e^{i\alpha} \in \mathbb{R}$ pour $\alpha = \frac{7n\pi}{12}$.
Donc $\alpha = k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$,
puis $7n = 12k$, donc $12 \mid 7n$. Or $12 \wedge 7 = 1$, donc (Gauss) $12 \mid n$.

• Réciproquement, soit n un multiple positif de 12. Alors $n = 12k$ où $k \in \mathbb{N}$.
Alors $A^n = 2^{6k} e^{7ik\pi} = 2^{6k} (-1)^{7k} \in \mathbb{Z}$.

En conclusion, les solutions sont les multiples positifs de 12.

R2 On suppose que $A \Delta B = \{x\}$ pour un objet x . Alors $A \neq B$ et x est dans exactement un des ensembles A et B .

1^{er} cas. $\begin{cases} x \notin A \\ x \in B \end{cases}$ Soit $y \in A$. Alors $y \neq x$ donc $y \in B$.
(sinon $y \notin B$ puis $y \in A \Delta B$)

2^e cas. $\begin{cases} x \notin B \\ x \in A \end{cases}$ Symétriquement, on trouve que tout élément de B est élément de A .

conclusion : Ou bien tout élément de A est élément de B , ou bien tout élément de B est élément de A .

R3 Par M21, les éléments de $(A \Delta B) \Delta C$ sont les objets appartenant à un nombre impair des ensembles A, B, C .

En appliquant cela à B, C, A , on en déduit $(A \Delta B) \Delta C = (B \Delta C) \Delta A$.

• Par M9, on a par ailleurs $A \Delta (B \Delta C) = (B \Delta C) \Delta A$.

En conclusion, $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

R4 Montrons que Caroline a raison.

Il y a $63 \times 20 = 1260$ couples $(a; b)$ où $a \in \{1; \dots; 63\}$ et $b \in \{1; \dots; 20\}$.

• Il suffit de montrer que les nombres $20a + 63b$ ainsi formés sont deux à deux distincts.

• Soit $(a; b)$ et $(a'; b')$ deux tels couples tels que $20a + 63b = 20a' + 63b'$.

Alors $20(a - a') = 63(b' - b)$. Or $20 \wedge 63 = 1$ donc $63 \mid a - a'$ (Gauss)

Or $|a - a'| < 63$, donc $a - a' = 0$ puis $63(b' - b) = 0$. Ainsi $a' = a$ et $b' = b$.

Enfin, puisque Caroline a raison, ni Olivier ni Anne ne peut avoir raison (il y a au moins 4000 entiers de 83 à 4369).