

Nom et Prénom :

Code Sujet :



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

○ TESCIA FEUILLE-RÉPONSE ÉPREUVE 1 ○

R1 $\forall u$ M17 on a $\sin(\widehat{DCE}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{DCE})} = \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Montrons que $0,6 < \sin(\widehat{DCE}) < 0,7$. Par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $[0; 1]$,

il suffit pour cela de montrer que $(0,6)^2 < \frac{3}{7} < (0,7)^2$, autrement dit $2,52 < 3 < 3,43$. Cette inégalité est vraie, donc le résultat encadré vaut.

Conclusion: parmi les nombres proposés, le plus proche de $\sin(\widehat{DCE})$ est 0,7.

R2 La question M34 donne que h_e est croissante sur $[e; +\infty[$ et décroissante sur $]0; e]$. On $h_e(e) = 0$, donc $h_e(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $x > 1$. Alors $x - e \ln(x) = h_e(x) \geq 0$ et $\ln(x) > 0$ (car $x > 1$).

On conclut par division que $\frac{x}{\ln(x)} - e \geq 0$, autrement dit: $\frac{x}{\ln(x)} \geq e$.

R3 Notons A_i l'événement: « on tire une boule noire aux i premiers tirages »

On a $P(A_0) = 1$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a $P(A_i | A_{i-1}) = \frac{n-1-i}{n+1-i}$ (sachant A_{i-1} il reste $n-1-i$ boules noires et $n+1-i$ boules dans l'urne au total);

puisque $A_i \subset A_{i-1}$ on en déduit $P(A_i) = P(A_i | A_{i-1}) P(A_{i-1}) = \frac{n-1-i}{n+1-i} P(A_{i-1})$.

Enfin $P(X=k) = P(\overline{A_k} \cap A_{k-1}) = P(\overline{A_k} | A_{k-1}) P(A_{k-1}) = \frac{2}{n+1-k} P(A_{k-1})$.

CONCLUSION:

Par télescopage, $P(X=k) = \frac{2}{n+1-k} \times \frac{n-k}{n+2-k} \times \frac{n+1-k}{n+3-k} \times \dots \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-2}{n} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$.

R4 On suppose que $u_0 \in]0; \pi]$. Par M55, (u_n) est croissante; par M54 on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \pi$. En combinant les deux: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq \pi$.

Comme $(u_n)_n$ est croissante et majorée, elle converge vers un réel l . L'inégalité précédente donne $u_0 \leq l \leq \pi$ (passage à la limite).

Enfin $\begin{cases} \sin(u_n) = u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l - l = 0 \\ \sin(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(l) \text{ (continuité de } \sin) \end{cases}$ donc $\sin(l) = 0$ (unicité de la limite).

Conclusion: $0 < l \leq \pi$ et $\sin(l) = 0$ assurent que $\boxed{l = \pi}$