

Nom et Prénom :

Code Sujet :



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

○ TEsCIA FEUILLE-RÉPONSE ÉPREUVE 2, OPTION B ○

R1 On suppose que $A \Delta B = \{x\}$ pour un objet x . Alors x appartient à un et un seul des ensembles A et B . En particulier, $A \neq B$.

1^{er} cas: $\begin{cases} x \notin A \\ x \in B \end{cases}$ Soit $y \in A$. Alors $y \neq x$ donc $y \notin A \Delta B$. Puisque $y \in A$ on doit alors avoir $y \in B$ (sinon $y \in A \Delta B$).
Ainsi, tout élément de A est élément de B .

2^e cas: $\begin{cases} x \notin B \\ x \in A \end{cases}$ Symétriquement, on montre que tout élément de B est élément de A .
Conclusion: ou bien tout élément de A est élément de B , ou bien tout élément de B est élément de A .

R2 • Par M21 les éléments de $(A \Delta B) \Delta C$ sont les objets appartenant à un nombre impair des ensembles A, B, C .
En appliquant cela à B, C, A on en déduit $(A \Delta B) \Delta C = (B \Delta C) \Delta A$.
• Par M9 on a par ailleurs $A \Delta (B \Delta C) = (B \Delta C) \Delta A$.

En conclusion, $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

R3 Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Supposons par l'absurde qu'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc $n = |n| = |n - u_n + u_n| \leq |n - u_n| + |u_n|$
et donc $n \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2M$.
C'est absurde.

En conclusion, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

R4 Procédons par récurrence. Posons $H_n: \langle u_n < n \rangle$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation: H_p est vraie par hypothèse.
- Hérédité: Soit $n \geq p$ tel que H_n soit vraie.
Alors $u_n \leq n$ donc $u_{n+1} = n - u_n$ puis $n+1 - u_{n+1} = 1 + u_n$.

Enfin $u_n = |(n-1) - u_{n-1}| \geq 0$ car $n \geq p > 0$. Ainsi $n+1 - u_{n+1} \geq 1$
et on conclut que $u_{n+1} < n+1$.

Conclusion: par récurrence, $\forall n \geq p, u_n < n$.