TeSciA

2025

Mathématiques Générales Avancées

Épreuve 2, Option B

15 mars 2025

16h-17h30 heure de Paris

Code sujet : ◯ ◯ ●

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiple* sont numérotées **M1**, **M2**, etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2**, etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2**, etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiple. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiple !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

TeSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).
Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.

AORES

Exercice 1. Calcul algébrique, équations et inéquations

☐ **M1** L'expression de $\sqrt{\frac{3}{5}} \times \sqrt{\frac{24}{5}}$ sans radicaux au dénominateur est :

A $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ B $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ C $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ D $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ E $\frac{6\sqrt{2}}{5}$

☐ **M2** Quand le réel x parcourt l'intervalle $]3;+\infty[$, le réel $\frac{2x-3}{1-x}$ parcourt l'intervalle :

A $]-\infty;-2[$ B $\left]-2;-\frac{3}{2}\right[$ C $\left]-2;-\frac{5}{3}\right[$ D $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ E $\left]-1;\frac{3}{2}\right[$

☐ **M3** Pour deux réels x et y, l'égalité $(x-y)^2 = (1+x^2)(1+y^2)$ est réalisée si et seulement si :

A $xy=-1$ B $xy=1$ C $x>0$ et $y<0$ D $x>0$ et $y>0$ E $xy<0$

☐ **M4** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2x-3}{x+1} + \frac{3}{x-1} < \frac{2x^2}{x^2-1}$ est :

A $\left]-\frac{1}{2};1\right[$ B $]-1;1[\cup]3;+\infty[$ C $]-\infty;-1[\cup]1;3[$

D aucune des autres réponses proposées E $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup]1;5[$

☐ **M5** L'ensemble des solutions de l'équation

$$1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3=0$$

est :

A $\{0;1\}$ B $\{0\}$ C $\{0;2\}$ D aucune des autres réponses proposées E $\emptyset$

☐ **M6** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x^2+21} \geqslant x-7$ est :

A $[2;+\infty[$ B $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ C $[7;+\infty[$ D $\mathbb{R}$ E $\emptyset$

☐ **M7** La valeur de $\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$ est :

A $\frac{1}{8}\ln(\sqrt{2}+1)$ B 0 C $\frac{1}{16}\ln(2\sqrt{2}+3)$ D 1 E $-\frac{1}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

△ **L1** Donner le domaine de définition et une expression simplifiée de $A(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$.

☐ **M8** Soit m un nombre réel. Le nombre de solutions de $e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$ est :

A $\begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 < m < 2 \\ 1 & \text{si} \quad m = -1 \text{ ou } 2 \\ 2 & \text{si} \quad m > 2 \text{ ou } m < -1 \end{cases}$ B $\begin{cases} 0 & \text{si} \quad |m-1| < 1 \\ 1 & \text{si} \quad |m-1| = 1 \\ 2 & \text{si} \quad |m-1| > 1 \end{cases}$ C $\begin{cases} 0 & \text{si} \quad |m| < 1 \\ 1 & \text{si} \quad |m| = 1 \\ 2 & \text{si} \quad |m| > 1 \end{cases}$

D $\begin{cases} 0 & \text{si} \quad m < -1 \\ 1 & \text{si} \quad m = -1 \\ 2 & \text{si} \quad m > -1 \end{cases}$ E $\begin{cases} 0 & \text{si} \quad m < 1 \\ 1 & \text{si} \quad m = 1 \\ 2 & \text{si} \quad m > 1 \end{cases}$

Exercice 2. Différence symétrique d'ensembles

Pour deux ensembles A_1 et A_2, on note $A_1 \Delta A_2$ l'ensemble formé des objets x qui appartiennent à A_1 mais pas à A_2 et des objets x qui appartiennent à A_2 mais pas à A_1. On dit que $A_1 \Delta A_2$ est la **différence symétrique** de A_1 et A_2 (dans cet ordre).

Par exemple :

- pour $A_1 = \{1; 2; 4\}$ et $A_2 = \{1; 2; 3\}$, on a $A_1 \Delta A_2 = \{3; 4\}$;
- pour l'ensemble B formé des élèves Léa, Paul et Séverine, et l'ensemble C formé des élèves Paul et Mathilde, l'ensemble $B \Delta C$ est formé des élèves Léa, Mathilde et Séverine, autrement dit $B \Delta C = \{\text{Léa}, \text{Mathilde}, \text{Séverine}\}$.

On rappelle aussi que $A_1 \cap A_2$ désigne l'ensemble des objets qui appartiennent à la fois à A_1 et à A_2. Dans le premier exemple ci-dessus, on a donc $A_1 \cap A_2 = \{1; 2\}$, et dans le deuxième $B \cap C = \{\text{Paul}\}$.

On note $\emptyset$ l'ensemble vide.

Propriétés élémentaires de la différence symétrique

△ **L2** Donner la différence symétrique des ensembles $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{Z}$.

☐ **M9** Vrai ou faux ? On a $A \Delta B = B \Delta A$ quels que soient les ensembles A et B.

A Cette affirmation n'a pas de sens B Faux C Vrai

☐ **M10** Pour tout ensemble A, la différence symétrique $A \Delta A$ est égale à :

A A B $\emptyset$ C aucune des autres réponses

☐ **M11** Pour tout ensemble A, la différence symétrique $A \Delta \emptyset$ est égale à :

A aucune des autres réponses B A C $\emptyset$

☐ **M12** Pour tout ensemble A, l'ensemble $(A \Delta A) \Delta A$ est égal à :

A $\emptyset$ B A C aucune des autres réponses

☐ **M13** Pour deux ensembles A et B, une condition équivalente au fait que $A\Delta B$ soit vide est :

A aucune des autres réponses

B A est vide

C $A = B$

D A et B sont vides

E B est vide

☐ **M14** Pour deux ensembles A et B, si tout élément de $A\Delta B$ est élément de A alors on peut affirmer que :

A aucune des autres affirmations proposées ne peut être soutenue

B B est vide

C tout élément de B est élément de A

D tout élément de A est élément de B

E $A\Delta B$ est vide

☐ **M15** Pour deux ensembles A et B, si $A\Delta B$ possède exactement un élément alors on peut affirmer que :

A A est vide

B ou bien tout élément de A est élément de B, ou bien tout élément de B est élément de A

C aucune des autres affirmations proposées ne peut être soutenue

D B est vide

E tout élément de A est élément de B

◯ **R1** Justifier votre réponse à la question **M15**.

☐ **M16** Soit A et B deux ensembles. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?

A Il existe toujours un et un seul ensemble X tel que $A\Delta X = B$

B Il existe toujours plusieurs ensembles X tels que $A\Delta X = B$

C Il existe toujours au moins un ensemble X tel que $A\Delta X = B$, mais il peut n'en exister qu'un seul ou plusieurs, selon le choix de A et B

D Il peut ne pas exister d'ensemble X tel que $A\Delta X = B$, selon le choix de A et B

☐ **M17** On introduit deux égalités qui peuvent être vraies ou non :

(i) $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.

(ii) $(A \cap B)\Delta C = (A\Delta C) \cap (B\Delta C)$.

Lesquelles sont vraies indépendamment du choix des ensembles A, B et C ?

A (i) mais pas (ii) B aucune des deux C (ii) mais pas (i) D les deux

Différence symétrique et finitude

Pour un ensemble fini A, on note $c(A)$ le nombre de ses éléments (aussi appelé son cardinal).

☐ **M18** On introduit trois implications, qui peuvent être vraies ou non :

(i) Si A et B sont finis alors $A\Delta B$ est fini.

(ii) Si $A\Delta B$ est fini alors A et B sont finis.

(iii) Si $A\Delta B$ et A sont finis alors B est fini.

Parmi ces implications, lesquelles sont vraies indépendamment du choix des ensembles A et B ?

[A] toutes sauf (iii) [B] toutes sauf (ii) [C] les trois [D] une seule [E] toutes sauf (i)

☐ **M19** Soit A et B deux ensembles finis tels que $A\Delta B$ soit fini. Le nombre $c(A\Delta B)$ vaut alors systématiquement :

[A] $c(A) + c(B) - 2\,c(A \cap B)$

[B] $c(A) + c(B) - c(A \cap B)$

[C] $c(A) + c(B)$

[D] $\dfrac{c(A)\,c(B)}{c(A \cap B)}$

[E] aucune des autres valeurs proposées, en général

☐ **M20** Quels que soient les ensembles finis A et B tels que $A\Delta B$ soit fini et $c(B)$ soit impair :

[A] $c(A\Delta B)$ est pair

[B] $c(A\Delta B)$ est impair

[C] $c(A\Delta B)$ n'a pas la même parité que $c(A)$

[D] $c(A\Delta B)$ a la même parité que $c(A)$

[E] on ne peut pas statuer sur la parité de $c(A\Delta B)$, même en connaissant celle de $c(A)$

Différence symétrique itérée

☐ **M21** Soit A_1, A_2 et A_3 des ensembles. Pour un objet x, on note $n(x)$ le nombre d'entiers i dans $\{1; 2; 3\}$ tels que x appartienne à A_i. L'appartenance de x à $(A_1\Delta A_2)\Delta A_3$ est alors équivalente à la condition :

[A] aucune des autres réponses proposées, en général

[B] $n(x) = 1$

[C] $n(x)$ est pair

[D] $n(x)$ est impair

[E] $n(x) = 2$

◯ **R2** En utilisant le résultat de la question **M21**, et en le combinant éventuellement avec d'autres résultats antérieurs (dont on citera alors les numéros de questions), démontrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ quels que soient les ensembles A, B et C.

Le résultat de **R2** permet de définir sans ambiguïté $A_1\Delta\cdots\Delta A_n$ pour n'importe quelle liste d'ensembles $(A_1,\ldots,A_n)$, sans tenir compte de l'ordre de parenthésage. Par exemple $A_1\Delta A_2\Delta A_3\Delta A_4$ peut être défini comme $(((A_1\Delta A_2)\Delta A_3)\Delta A_4$ mais aussi comme $A_1\Delta((A_2\Delta A_3)\Delta A_4)$, ce qui fournit le même résultat.

☐ **M22** On note $A_i=\{1;i\}$ pour tout entier naturel $i\geqslant 1$. L'ensemble $A_1\Delta\cdots\Delta A_{2025}$ est alors égal à :

- $\boxed{\text{A}}$ $\{0;2;\ldots;2025\}$
- $\boxed{\text{B}}$ $\emptyset$
- $\boxed{\text{C}}$ aucune des autres réponses proposées
- $\boxed{\text{D}}$ $\{0;1;2;\ldots;2025\}$
- $\boxed{\text{E}}$ $\{1;2;\ldots;2025\}$

☐ **M23** Soit $A_1,\ldots,A_p$ des ensembles, où $p\geqslant 4$. Pour un objet x, on note $n(x)$ le nombre d'entiers i dans $\{1;2;\ldots;p\}$ tels que x appartienne à A_i. L'appartenance de x à $A_1\Delta\cdots\Delta A_p$ est alors équivalente à la condition :

- $\boxed{\text{A}}$ aucune des autres réponses proposées, en général
- $\boxed{\text{B}}$ $n(x)$ est impair
- $\boxed{\text{C}}$ $n(x)$ a la même parité que p
- $\boxed{\text{D}}$ $n(x)=1$
- $\boxed{\text{E}}$ $n(x)=p-1$

Classes stables

On appelle **classe** tout ensemble fini non vide dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles finis. Par exemple, l'ensemble $\mathcal{C}=\{\{1;2;3\};\{1;3;5\};\emptyset\}$ est une classe, ses éléments sont $\{1;2;3\}$, $\{1;3;5\}$ et l'ensemble vide $\emptyset$ (tous finis). Dans ce qui suit, les classes sont systématiquement représentées par des majuscules calligraphiées, par exemple $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$, et leurs éléments sont représentés par des majuscules d'imprimerie, par exemple A,B,C.

Une classe $\mathcal{C}$ est dite **stable** lorsque, quels que soient les éléments A et B de $\mathcal{C}$, l'objet $A\Delta B$ est un élément de $\mathcal{C}$.

Par exemple, la classe $\{\{1;2;3\};\{1;2;4\}\}$ n'est pas stable car $\{1;2;3\}\Delta\{1;2;4\}$, qui vaut $\{3;4\}$, n'en est pas un élément.

☐ **M24** Parmi les ensembles suivants, combien sont des classes stables ?
$\mathcal{A}=\{\{1;2;3\},\emptyset\}$, $\mathcal{B}=\{\emptyset\}$, $\mathcal{C}=\{\{1;2;3\}\}$, $\mathcal{D}=\emptyset$.

$\boxed{\text{A}}$ aucun $\boxed{\text{B}}$ quatre $\boxed{\text{C}}$ deux $\boxed{\text{D}}$ un $\boxed{\text{E}}$ trois

On rappelle que pour un ensemble A, un **sous-ensemble** de A est un ensemble B tel que tout élément de B soit élément de A. Par exemple, $\emptyset$ et A sont des sous-ensembles de A.

☐ **M25** Pour un ensemble fini X, l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de X :

A est toujours une classe stable

B est toujours une classe, mais n'est pas toujours stable

C n'est pas toujours une classe

☐ **M26** Soit X un ensemble fini et Y un sous-ensemble de X. On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des sous-ensembles Z de X tels que Y soit un sous-ensemble de Z. Alors $\mathcal{C}$:

A est toujours une classe stable

B n'est pas toujours une classe

C est toujours une classe, mais n'est pas toujours stable

☐ **M27** Soit X un ensemble fini. On considère :

- L'ensemble $\mathcal{C}$ formé de tous les sous-ensembles de X ayant un nombre pair d'éléments.
- L'ensemble $\mathcal{D}$ formé de tous les sous-ensembles de X ayant un nombre impair d'éléments.

Lesquels sont des classes stables quel que soit le choix de X ?

A $\mathcal{D}$ B $\mathcal{C}$ C aucun d'entre eux D $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$

☐ **M28** Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux classes stables. On considère la différence symétrique $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$ et l'intersection $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$. Lesquelles sont des classes stables quel que soit le choix de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$?

A aucune d'entre elles B $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ C $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$ D $\mathcal{C}\Delta\mathcal{D}$

☐ **M29** Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux classes stables. On considère les ensembles suivants :

- L'ensemble $\mathcal{E}$ constitué de toutes les différences symétriques $C\Delta D$, avec C élément de $\mathcal{C}$ et D élément de $\mathcal{D}$.
- L'ensemble $\mathcal{F}$ constitué de toutes les intersections $C \cap D$, avec C élément de $\mathcal{C}$ et D élément de $\mathcal{D}$.

Lesquels sont des classes stables quel que soit le choix de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$?

A $\mathcal{F}$ B $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ C aucun d'entre eux D $\mathcal{E}$

Exercice 3. Une suite définie par récurrence

On s'intéresse dans cet exercice aux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = |u_n - n| \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On fixe une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout au long de l'exercice.

Le cas particulier $u_0 = 0$

☐ **M30** Si $u_0 = 0$ alors u_8 vaut :

A 4 B 1 C 6 D 0 E 2

△ **L3** On suppose dans cette question que $u_0 = 0$. Quelle conjecture peut-on formuler sur la valeur du couple (u_{2n}, u_{2n+1}) en fonction de n ?

Le cas général

☐ **M31** Vrai ou Faux ? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie.

A Vrai B Faux

☐ **M32** Si la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite finie alors cette limite est égale à :

A -1 B 2 C $\frac{1}{2}$ D 0 E 1

☐ **M33** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

A de limite nulle B bornée C non bornée D périodique E de limite $\frac{n}{2}$

◯ **R3** Justifier votre réponse à la question **M33**.

☐ **M34** On fait l'hypothèse qu'il existe un entier N tel que $u_n \geqslant n$ pour tout entier $n \geqslant N$. La conséquence la plus immédiate que l'on peut alors en tirer est qu'il existe une constante K telle que :

A $u_n = K + \frac{n(n-1)}{2}$ pour tout entier $n \geqslant N$

B $u_n = K - \frac{n^2}{2}$ pour tout entier $n \geqslant N$

C $u_n = K + \frac{n^2}{2}$ pour tout entier $n \geqslant N$

D $u_n = K - \frac{n}{2}$ pour tout entier $n \geqslant N$

E $u_n = K - \frac{n(n-1)}{2}$ pour tout entier $n \geqslant N$

☐ **M35** Vrai ou Faux ? Il existe un entier naturel N tel que $u_n \geqslant n$ pour tout entier $n \geqslant N$.

A Vrai B Faux

À partir de maintenant et dans toutes les questions suivantes, on suppose que, pour tout entier naturel N, il existe un entier $n \geqslant N$ tel que $u_n < n$.

☐ **M36** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

A Aucune des autres réponses proposées n'est vraie.

B La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être arithmétique, et dans ce cas sa raison est nécessairement $\frac{1}{2}\cdot$

C La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être arithmétique.

D La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être arithmétique, et dans ce cas sa raison est nécessairement $-\frac{1}{2}\cdot$

E La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être arithmétique, et dans ce cas sa raison peut être $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$, selon les cas.

On suppose dans la suite qu'il existe un entier $p > 0$ tel que $u_p < p$, et on en fixe un définitivement.

◯ **R4** Montrer que $u_n < n$ pour tout entier $n \geqslant p$.

☐ **M37** Pour tout entier $n \geqslant p$, le terme u_{n+2} est égal à :

A u_n B $u_n + 1$ C $-u_n + 1$ D $u_n - 1$ E u_{n+1}

☐ **M38** Pour tout entier naturel n, on définit $\alpha_n = u_n - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}\cdot$ Alors, pour tout entier $n \geqslant p$, le terme α_{n+1} vaut :

A $\alpha_n - \frac{1}{4}$ B α_n C $-\alpha_n$ D $-\alpha_n + \frac{1}{2}$ E $\alpha_n + \frac{1}{4}$

☐ **M39** On peut donc conclure à l'existence d'un réel C tel que, pour tout entier $n \geqslant p$:

A $u_n = \frac{n}{2} + C^n$

B $u_n = \frac{n}{2} + (-1)^n C$

C $u_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} + (-1)^n C$

D $u_n = -\frac{n}{2} + \frac{1}{4} + (-1)^n C$

E $u_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + (-1)^n C$

Exercice 4. Détection de réels par des suites d'entiers

On fixe un objet mathématique qui n'est pas un nombre réel, et on le note $+\infty$ (sa nature profonde n'a pas d'importance dans la suite). On note $]1;+\infty]$ l'ensemble formé de $+\infty$ et des réels strictement supérieurs à 1.

Pour un élément x de $]1;+\infty]$:

- ou bien x est réel et on note $E(x)$ l'unique entier naturel tel que $k \leqslant x < k+1$ (autrement dit, la partie entière de x) ;
- ou bien $x = +\infty$ et on pose $E(x) = +\infty$.

Pour un élément x de $]1;+\infty]$, on définit un objet x' comme suit :

- $x' = \dfrac{1}{x - E(x)}$ si x est un réel mais pas un entier ;
- $x' = +\infty$ dans tout autre cas.

On rappelle enfin qu'un nombre rationnel est un nombre de la forme $\dfrac{a}{b}$, où a et b sont des entiers relatifs dont $b \neq 0$. On admet que tout nombre rationnel r possède une unique écriture sous la forme $r = \dfrac{p}{q}$ où p est un entier relatif et q un entier naturel non nul tels que p et q n'aient aucun diviseur premier commun : on dit qu'il s'agit de l'écriture de r sous forme irréductible.

Considérations élémentaires sur la transformation $x \mapsto x'$

☐ **M40** Vrai ou faux ? L'objet x' est dans $]1;+\infty]$ quel que soit x dans $]1;+\infty]$.

A Vrai B Faux

☐ **M41** On donne quatre affirmations :

(i) Si x est un entier alors x' n'est pas un entier.

(ii) Si x est un entier alors x' est un entier.

(iii) Si x n'est pas un entier alors x' n'est pas un entier.

(iv) Si x n'est pas un entier alors x' est un entier.

Combien sont vraies indépendamment du choix de x dans $]1;+\infty]$?

A 1 B 0 C 3 D 2 E 4

△ **L4** Donner sans justification les x dans $]1;+\infty]$ pour lesquels $x' = x$.

□ **M42** On donne quatre affirmations :

(i) Si x est un rationnel alors x' est un rationnel.

(ii) Si x est un rationnel alors x' n'est pas un rationnel.

(iii) Si x n'est pas un rationnel alors x' n'est pas un rationnel.

(iv) Si x n'est pas un rationnel alors x' est un rationnel.

Laquelle est vraie indépendamment du choix de x dans $]1;+\infty]$?

A (i) B (iv) C (ii) D (iii) E Aucune d'entre elles

Itérations de l'opération prime, suite des parties entières

On part d'un élément x de $]1;+\infty]$. On construit une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]1;+\infty]$ par récurrence en posant $r_0 = x$ et en imposant, pour tout entier naturel n, la relation

$$r_{n+1} = (r_n)'.$$

On construit alors en parallèle la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$c_n = E(r_n) \qquad \text{pour tout entier naturel } n.$$

Par exemple, pour $x = \dfrac{3}{2}$ on a $r_0 = \dfrac{3}{2}$, $r_1 = 2$, $r_2 = +\infty$, etc., et $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = +\infty$, etc.

□ **M43** On suppose que $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot$ Alors c_{2025} vaut :

A 2 B 3 C 1 D 0 E $+\infty$

□ **M44** On suppose que $x = \sqrt{3}$. Alors c_{2025} vaut :

A 1 B 2 C 0 D $+\infty$ E 4

△ **L5** On suppose que $c_7 = +\infty$ et $c_6 = 2$. Que vaut r_6 ?

□ **M45** On suppose que $c_7 = +\infty$, que $c_i = 2$ pour tout entier pair i compris entre 0 et 6, et que $c_i = 1$ pour tout entier impair i compris entre 0 et 6. Alors x vaut :

A $\dfrac{41}{15}$ B il n'y a pas assez d'informations pour le savoir C $\dfrac{153}{56}$ D $\dfrac{112}{41}$ E $\dfrac{194}{71}$

□ **M46** On se donne une liste $(d_0;\ldots;d_p)$ d'entiers naturels non nuls. On dit que x est adapté à cette liste lorsque $c_k = d_k$ pour tout entier k compris entre 0 et p, et $c_{p+1} = +\infty$. On introduit plusieurs affirmations :

(i) S'il existe un nombre réel $x > 1$ adapté à $(d_0;\ldots;d_p)$ alors $d_p \neq 1$.

(ii) Si $d_p \neq 1$ alors il existe un nombre réel $x > 1$ adapté à $(d_0;\ldots;d_p)$.

Lesquelles sont vraies indépendamment du choix de $(d_0;\ldots;d_p)$?

A Toutes B (i) C (ii) D Aucune

Terminaison pour les rationnels

Pour un nombre rationnel positif x, que l'on écrit sous forme irréductible $x = \dfrac{p}{q}$, l'entier $p+q$ est appelé **poids** de x.

☐ **M47** Soit x un rationnel strictement supérieur à 1 tel que x' soit rationnel. On note $x = \dfrac{p}{q}$ son écriture sous forme irréductible. On introduit deux affirmations :

(i) L'écriture sous forme irréductible de x' a q pour numérateur.

(ii) Le poids de x' est strictement inférieur à celui de x.

Lesquelles sont vraies ?

[A] Toutes [B] Aucune [C] (ii) [D] (i)

☐ **M48** On donne deux implications :

(i) Si x est rationnel ou vaut $+\infty$ alors il existe un entier naturel n tel que $r_n = +\infty$.

(ii) S'il existe un entier naturel n tel que $r_n = +\infty$ alors x est rationnel ou vaut $+\infty$.

Lesquelles sont vraies ?

[A] Toutes [B] (i) [C] (ii) [D] Aucune

Caractérisation par la suite des parties entières

On reprend la construction précédente. Cette fois-ci, on suppose plus précisément que x n'est ni un nombre rationnel ni $+\infty$. On se propose dans ce cas de démontrer que la connaissance de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suffit à reconstituer x. Pour clarifier le discours, on notera désormais $c_n(x)$ le terme de rang n de cette suite, afin de marquer la dépendance envers x. De même, on notera $r_n(x)$ le terme de rang n de la suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$, afin de bien marquer sa dépendance envers x.

△ **R5** Soit x et y deux nombres non rationnels dans $]1,+\infty[$. On suppose que $c_0(x) = c_0(y)$ et $c_1(x) = c_1(y)$.

Démontrer qu'il existe des entiers naturels non nuls a, b, c, d tels que $x = \dfrac{a\, r_2(x) + b}{c\, r_2(x) + d}$ et $y = \dfrac{a\, r_2(y) + b}{c\, r_2(y) + d}$, et en déduire que $|x-y| \leqslant \dfrac{|r_2(x) - r_2(y)|}{4}$.

☐ **M49** Soit x et y deux nombres réels strictement supérieurs à 1. On suppose trouvé un entier naturel n tel que $c_k(x) = c_k(y)$ pour tout entier k compris entre 0 et $2n$.

Quelle affirmation la plus précise peut-on déduire de cette hypothèse, par application directe de résultats antérieurs ?

[A] $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$

[B] $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{4^{n+1}}$

[C] $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$

[D] $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$

[E] Aucune des autres réponses proposées

Exercice 5. Records d'une permutation

Dans tout l'exercice, on fixe un entier naturel n supérieur ou égal à 3.

On appelle **permutation** de $\{1;2;\ldots;n\}$ toute liste (ordonnée) $(i_1;\ldots;i_n)$ dans laquelle chaque entier de 1 à n est représenté exactement une fois. Pour la liste $\sigma=(i_1;\ldots;i_n)$, on écrit aussi $\sigma(k)=i_k$. Par exemple, pour $n=4$ la liste $\sigma=(4;3;1;2)$ est une permutation de $\{1;2;3;4\}$ et $\sigma(3)=1$ et $\sigma(4)=2$.

On dit qu'une permutation σ de $\{1;2;\ldots;n\}$ présente un **record en position** i (où $i\in\{1;2;\ldots;n\}$) si $i=1$ ou si $i>1$ et $\sigma(i)$ est le plus grand des nombres $\sigma(1);\sigma(2);\ldots;\sigma(i)$. On note $\mathcal{R}(\sigma)$ le nombre de records de la permutation σ.

Par exemple, pour $n=6$ et $\sigma=(4;3;1;6;2;5)$, la permutation σ a exactement 2 records, en positions 1 et 4 (ainsi $\mathcal{R}(\sigma)=2$).

Ou encore, pour $n=7$ et $\sigma=(2;3;5;1;4;7;6)$, la permutation σ a exactement 4 records, en positions 1, 2, 3 et 6 (ainsi $\mathcal{R}(\sigma)=4$).

Le cas $n=3$

△ **L6** Donner toutes les permutations de $\{1;2;3\}$ ayant exactement 2 records.

Le cas $n=4$

Dans cette partie on étudie le cas $n=4$.

☐ **M50** Le nombre de permutations de $\{1;2;3;4\}$ est :

A 16   B aucune des autres réponses   C 256   D 24   E 6

☐ **M51** Le nombre de permutations σ de $\{1;2;3;4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma)=4$ est :

A 11   B 3   C 6   D 1   E 2

☐ **M52** Le nombre de permutations σ de $\{1;2;3;4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma)=1$ est :

A 1   B 11   C 6   D 3   E 2

△ **L7** Donner les permutations σ de $\{1;2;3;4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma)=3$.

☐ **M53** Le nombre de permutations σ de $\{1;2;3;4\}$ telles que $\mathcal{R}(\sigma)=2$ est :

A 11   B 2   C 3   D 6   E 1

Le cas $n\geqslant 4$

☐ **M54** Le nombre de permutations de $\{1;2;\ldots;n\}$ est :

A n^n B 2^n C aucune des autres réponses   D 2^{n+1} E $n!$

☐ **M55** Le nombre de permutations de $\{1; 2; \ldots; n\}$ ayant n records est :

A n B aucune des autres réponses C 2^{n-1} D 1 E 2^n

☐ **M56** Le nombre de permutations de $\{1; 2; \ldots; n\}$ n'ayant qu'un seul record est :

A $(n-1)!$ B $2^{n-1}-2$ C $n+2$ D $2(n-1)$ E $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Permutations ayant $n-1$ records

☐ **M57** Pour toute permutation σ de $\{1; 2; \ldots; n\}$ ayant exactement $n-1$ records, on a :

A $\sigma(n) = n-1$

B $\sigma(n) < n-1$

C $\sigma(n) = 1$

D $\sigma(n-1) = n$ ou $\sigma(n) = n$

E $\sigma(n) = n$ ou $\sigma(n) = n-1$

☐ **M58** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \ldots; n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n-1) = n$ est :

A $(n-2)!$ B n C $n-1$ D 0 E 1

☐ **M59** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \ldots; n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n) = n$ et $\sigma(1) \neq 1$ est :

A $n-1$ B 1 C 0 D $n-2$ E n

☐ **M60** Soit k un élément de $\{2; \ldots; n-1\}$. Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \ldots; n\}$ ayant exactement $n-1$ records et telles que $\sigma(n) = n$, $\sigma(1) = 1$ et n'ayant pas de record en position k est :

A $1+2+\cdots+(k-1)$ B $k-2$ C $1+2+\cdots+(n-1)$ D 1 E $n-1$

☐ **M61** Le nombre de permutations σ de $\{1; 2; \ldots; n\}$ ayant exactement $n-1$ records, et telles que $\sigma(n) = n$ et $\sigma(1) = 1$, est :

A $n-1$ B $n-2$ C 1 D $\dfrac{n^2-3n-2}{2}$ E $\dfrac{n^2-5n+6}{2}$

△ **L8** Donner le nombre de permutations de $\{1; 2; \ldots; n\}$ ayant exactement $n-1$ records.

Permutations ayant 2 records

☐ **M62** Soit p un élément de $\{2; \ldots; n\}$. Le nombre de p-listes $(k_1; k_2; \ldots; k_p)$ d'éléments distincts de $\{1; 2; \cdots; n\}$ dont k_p est le plus grand élément vaut :

A $\dbinom{n}{p}$ B $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ C $\dfrac{n!}{p\,(n-p)!}$ D n^{p-1} E $(p-1)!$

☐ **M63** Soit p un élément de $\{2;\dots;n\}$. Le nombre de permutations de $\{1;2;\dots;n\}$ ayant exactement deux records, lesquels sont atteints en positions 1 et p, est :

A $\dfrac{(n-1)!}{(p-1)!}$ B $\dfrac{(n-1)!}{p}$ C $\dfrac{(n-1)!}{p-1}$ D $\dfrac{1}{p}$ E $\dfrac{1}{p-1}$

☐ **M64** Le nombre de permutations de $\{1;2;\dots;n\}$ ayant exactement deux records est :

A $1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{p!}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)!}$

B $\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

C $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}$

D $(n-1)!\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}\right)$

E $(n-1)!\left(\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$

Une loi de probabilité sur l'ensemble des permutations de $\{1;2;\dots;n\}$

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1;2;\cdots;n\}$. On le munit de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$, c'est-à-dire que, pour toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$, on a $\mathbf{P}(\{\sigma\})=\dfrac{1}{n!}$.

On définit une variable aléatoire $\mathcal{R}_n$ qui à toute permutation σ de $\mathcal{S}_n$ associe le nombre de records de σ.

On note, pour tout entier i de $\{1;2;\cdots;n\}$, T_i la variable aléatoire qui, à chaque permutation σ de $\mathcal{S}_n$, associe 1 si σ présente un record en position i, et 0 sinon. La variable T_1 est donc constante égale à 1.

☐ **M65** L'espérance de $\mathcal{R}_3$ est :

A $\dfrac{4}{3}$ B 2 C $\dfrac{11}{6}$ D $\dfrac{5}{3}$ E $\dfrac{7}{6}$

☐ **M66** La variance de $\mathcal{R}_3$ est :

A $\dfrac{7}{54}$ B $\dfrac{17}{36}$ C $\dfrac{5}{54}$ D $\dfrac{13}{36}$ E $\dfrac{19}{36}$

☐ **M67** Soit i un élément de $\{1;2;\dots;n\}$. La probabilité $\mathbf{P}(T_i=1)$ vaut alors :

A aucune des autres réponses proposées B $\dfrac{1}{i}$ C $\dfrac{1}{i!}$ D $\dfrac{1}{i+1}$ E $\dfrac{1}{(i+1)!}$

△ **L9** On admet que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est la somme de leurs espérances. Donner une expression simple de l'espérance de $\mathcal{R}_n$.