

Exercice 1. Nombres complexes

Calculs algébriques

□ **M1** Le nombre complexe $(a + i)(1 + 2i)$ est imaginaire pur si et seulement si le réel a vaut :

- ☒ 2
 ☐ 1
 ☐ $\frac{1}{2}$
 ☐ 0
 ☐ -2

□ **M2** Le produit de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\frac{1}{3 - 4i}$ vaut :

- ☐ $-\frac{12}{25}$
 ☐ $-\frac{1}{12}$
 ☐ $-\frac{12}{625}$
☒ $\frac{12}{625}$
☐ $\frac{12}{25}$

□ **M3** La partie réelle du nombre complexe $\frac{3 - i}{4 + i}$ vaut :

- ☐ $\frac{11}{5}$
☐ $\frac{3}{4}$
☒ $\frac{11}{17}$
☐ $\frac{11}{\sqrt{17}}$
☐ $\frac{13}{17}$

□ **M4** Le module du nombre complexe $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ vaut :

- ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
☐ 1
☐ $\frac{1}{2}$
☐ $\sqrt{6}$
☒ $\sqrt{\frac{3}{2}}$

□ **M5** On rappelle que l'argument principal d'un nombre complexe non nul est son seul argument appartenant à $]-\pi; \pi]$. On note α, β, γ les arguments principaux respectifs des nombres complexes $A = 4 + i$, $B = -5 + 2i$ et $C = 3 + 2i$. Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ $\beta < \alpha < \gamma$
☐ $\alpha < \beta < \gamma$
☐ $\gamma < \alpha < \beta$
☐ Aucune des autres affirmations n'est vraie
☒ $\alpha < \gamma < \beta$

△ **L1** Donner le nombre de solutions de l'équation $z^{2006} = 1$ dont la partie réelle est strictement positive.

□ **M6** On donne deux réels θ et φ . Pour que le nombre complexe $\cos(\theta) + i \sin(\varphi)$ soit de module 1, il faut et il suffit que :

- ☐ $\theta - \varphi$ soit multiple de π
☐ $\theta - \varphi$ soit multiple de 2π
☒ $\theta - \varphi$ soit multiple de π ou $\theta + \varphi$ soit multiple de π
☐ $\theta - \varphi$ soit multiple de 2π ou $\theta + \varphi$ soit multiple de 2π
☐ aucune des autres conditions proposées

△ **L2** Donner, sous forme trigonométrique, les solutions non réelles de l'équation $z^5 - z^3 - z^2 + 1 = 0$ d'inconnue z complexe.

□ **M7** Les entiers naturels n tels que $\left(\sin\left(\frac{\pi}{45}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{45}\right)\right)^n = 1$ sont les multiples strictement positifs de :

- ☐ **A** 4 ☐ **B** 45 ☐ **C** 2 ☐ **D** 90 ☒ 180

Équations et géométrie

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans un plan rapporté à un repère orthonormal. On rappelle qu'un **singleton** est un ensemble formé d'un seul point, et qu'une **paire** est un ensemble formé de deux points.

□ **M8** L'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 2$ est :

- ☐ **A** l'ensemble vide
☐ **B** aucun des autres ensembles proposés
☒ une droite
☐ **D** un cercle
☐ **E** la réunion de deux droites sécantes

□ **M9** L'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $z^2 + (\bar{z})^2 = 0$ est :

- ☐ **A** l'ensemble vide
☒ la réunion de deux droites perpendiculaires
☐ **C** la réunion de deux droites sécantes non perpendiculaires
☐ **D** un singleton
☐ **E** une droite

□ **M10** L'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $|z + 2i|^2 = z^2 + 4$ est :

- ☒ la réunion d'une droite et d'un singleton sans point commun
☐ **B** la réunion d'une droite et d'une paire sans point commun
☐ **C** un singleton
☐ **D** une droite
☐ **E** la réunion de deux droites sécantes

Exercice 2. Amas de nombres réels

Un intervalle ouvert borné est un ensemble de la forme $]a; b[$ pour deux réels $a < b$. On prendra garde au fait que l'ensemble vide n'est pas un intervalle ouvert borné selon notre définition.

On rappelle que la réunion $A_1 \cup \dots \cup A_n$ de sous-ensembles $A_1, \dots, A_n$ de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels appartenant à au moins l'un des ensembles A_i . On rappelle que l'intersection de deux ensembles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B . On rappelle enfin qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B , et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B .

On appelle **amas** toute réunion (finie non vide) d'intervalles ouverts bornés, peu importe leur disposition. Par exemple, $]0; 1[\cup]2; 5[\cup]-1; 3[$ est un amas, et $]0; 10[$ en est aussi un.

Pour un amas A , on admet qu'il existe une unique écriture $A =]a_1; b_1[\cup]a_2; b_2[\cup \dots \cup]a_n; b_n[$ où $n \geq 1$ est un entier et $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$. On dit que les intervalles $]a_i; b_i[$ sont les **composantes** de A , et l'entier n est donc le nombre de composantes de A . Bien entendu, lorsque A est un simple intervalle ouvert borné, l'écriture précédente se limite à $n = 1$. Enfin, la **mesure** de l'amas A est la quantité

$$\mu(A) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n).$$

Quelques exemples

☐ **M11** Le nombre de composantes de l'amas $]0; 2[\cup]1; 3[$ vaut :

☐ A aucune des autres propositions ☒ 1 ☐ C 2 ☐ D 3 ☐ E 0

☐ **M12** La mesure de l'amas $]0; 2[\cup]1; 3[$ vaut :

☐ A 2 ☒ 3 ☐ C 1 ☐ D 4 ☐ E 0

☐ **M13** Le nombre de composantes de l'amas $] -2; -1[\cup]0; 2[\cup]1; 3[$ vaut :

☐ A 1 ☐ B aucune des autres propositions ☒ 2 ☐ D 0 ☐ E 3

△ **L3** Donner un amas à 3 composantes et de mesure 1.

□ **M14** L'ensemble des nombres réels vérifiant $-4 < x^2 - 4x < 5$:

- ☒ est un amas possédant 2 composantes
☐ **B** est un amas possédant 4 composantes
☐ **C** n'est pas un amas
☐ **D** est un amas possédant 3 composantes
☐ **E** est un amas possédant 1 composante

□ **M15** L'ensemble des nombres réels vérifiant $-4 \leq x^2 - 4x < 5$:

- ☐ **A** est un amas possédant 4 composantes
☒ est un amas possédant 1 composante
☐ **C** est un amas possédant 3 composantes
☐ **D** n'est pas un amas
☐ **E** est un amas possédant 2 composantes

□ **M16** L'ensemble des nombres réels vérifiant $-4 < x^2 - 4x \leq 5$:

- ☐ **A** est un amas possédant 1 composante
☒ n'est pas un amas
☐ **C** est un amas possédant 4 composantes
☐ **D** est un amas possédant 3 composantes
☐ **E** est un amas possédant 2 composantes

○ **R1** Justifier la réponse à la question **M16**.

△ **L4** On considère l'amas A formé des réels *non entiers* compris entre 1 et 2026. Préciser le nombre n de composantes de A , ainsi que la mesure $\mu(A)$ de A .

□ **M17** On considère l'amas A formé de la réunion des intervalles de la forme $]n; n+2+(-1)^n[$ où n parcourt $\{1; 2; 3; \dots; 2026\}$. Le nombre de composantes de A est :

- ☒ 2 ☐ **B** 2026 ☐ **C** 1013 ☐ **D** 1012 ☐ **E** 1

□ **M18** Comme dans la question **M17**, on considère l'amas A formé de la réunion des intervalles de la forme $]n; n+2+(-1)^n[$ où n parcourt $\{1; 2; 3; \dots; 2026\}$. La mesure de A est :

- ☐ **A** 1014 ☐ **B** 2026 ☐ **C** 4052 ☒ 2028 ☐ **E** 1013

Opérations sur les amas

☐ **M19** Pour deux intervalles ouverts bornés $]a; b[$ et $]c; d[$, l'inclusion $]a; b[\subset]c; d[$ est systématiquement équivalente à la condition :

☐ **A** $a < c$ et $b < d$

☐ **B** aucune des autres conditions proposées

☒ $c \leq a$ et $b \leq d$

☐ **D** $c < a$ et $b < d$

☐ **E** $a \leq c$ et $b \leq d$

☐ **M20** Pour deux intervalles ouverts bornés $]a; b[$ et $]c; d[$, l'intersection $]a; b[\cap]c; d[$:

☐ **A** est systématiquement vide

☐ **B** aucune des autres réponses proposées n'est correcte

☐ **C** est systématiquement un intervalle ouvert borné

☒ est systématiquement un intervalle ouvert borné ou l'ensemble vide, et les deux cas sont possibles

☐ **M21** Pour deux intervalles ouverts bornés $]a; b[$ et $]c; d[$, les nombres de composantes possibles pour l'amas $]a; b[\cup]c; d[$ sont :

☒ 1 et 2 ☐ **B** 1 ☐ **C** 2 ☐ **D** 1, 2 et 4 ☐ **E** aucune des autres réponses proposées

☐ **M22** Soit A un amas et x et y deux réels tels que $x < y$. L'affirmation la plus forte que l'on puisse soutenir est que :

☐ **A** Si x et y appartiennent à la même composante de A alors $[x; y] \subset A$

☒ x et y appartiennent à la même composante de A si et seulement si $[x; y] \subset A$

☐ **C** Si $[x; y] \subset A$ alors x et y appartiennent à la même composante de A

☐ **D** aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

☐ **M23** On fixe un amas A à n composantes. Pour un intervalle ouvert non vide $]x; y[$, les nombres de composantes possibles pour l'amas $A \cup]x; y[$ sont :

☐ **A** 1 et n

☐ **B** 1, n et $n + 1$

☐ **C** aucune des autres réponses proposées

☐ **D** les entiers compris entre 1 et n au sens large

☒ les entiers compris entre 1 et $n + 1$ au sens large

☐ **R2** Justifier la réponse à la question **M23**.

Dominique essaie de s'appuyer sur la question **M22** pour démontrer que si un amas A est la réunion de n intervalles ouverts $I_1, \dots, I_n$, alors A possède au plus n composantes. Voici son raisonnement :

1. « Je note p le nombre de composantes de A , et dans chacune des composantes de A je choisis un nombre. »
2. « J'ordonne les nombres ainsi obtenus pour les écrire $x_1 < \dots < x_p$. »
3. « Pour chaque entier i compris entre 1 et p , le nombre x_i est dans l'un des intervalles $I_1, \dots, I_n$. »
4. « Je conclus que $p \leq n$. »

☐ **M24** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

- ☒ La conclusion de Dominique est juste, mais elle a oublié de préciser que dans l'étape 3, deux nombres x_i et x_j , avec $i \neq j$, ne peuvent pas appartenir au même intervalle I_k
- ☐ B La conclusion de Dominique est juste, mais elle a oublié de préciser que dans l'étape 3, un nombre x_i ne peut pas appartenir à plusieurs intervalles I_k
- ☐ C La conclusion de Dominique est juste, mais elle a oublié de préciser que dans l'étape 3, en faisant varier i on obtient tous les intervalles I_k possibles
- ☐ D La conclusion de Dominique est juste, et son raisonnement est complet
- ☐ E La conclusion de Dominique est fausse

☐ **M25** On réunit n amas (avec $n \geq 2$) ayant chacun n composantes. La meilleure inégalité que l'on puisse alors affirmer est que la réunion de ces amas a un nombre de composantes inférieur ou égal à :

- ☐ A $2n$ ☐ B n ☒ n^2 ☐ D aucun des nombres proposés, en général ☐ E n^n

☐ **M26** Pour deux amas A et B ayant respectivement n et p composantes, l'affirmation la plus forte que l'on puisse soutenir est que si $A \cap B$ est un amas alors son nombre de composantes est inférieur ou égal à :

- ☐ A np ☒ $n + p - 1$ ☐ C le plus grand entier parmi n et p ☐ D $n + p$
- ☐ E aucun des nombres proposés

Image d'un amas

☐ **M27** Étant donné un amas A , l'ensemble des réels x^2 , lorsque x parcourt A :

- ☐ A n'est jamais un amas
- ☐ B est toujours un amas
- ☐ C est un amas si 0 appartient à A , et n'en est pas un sinon
- ☒ est un amas si 0 n'appartient pas à A , et n'en est pas un sinon
- ☐ E est un amas si tous les éléments de A sont positifs, et n'en est pas un sinon

- ☐ **M28** Étant donné un amas A ne contenant pas 0, l'ensemble des réels $\frac{1}{x}$, lorsque x parcourt A :
- ☐ **A** est un amas si tous les éléments de A sont strictement positifs, mais peut ne pas être un amas dans le cas contraire
- ☒ aucune des autres réponses proposées n'est vraie
- ☐ **C** n'est jamais un amas
- ☐ **D** est toujours un amas

Amas à contraintes

- ☐ **M29** On considère l'ensemble E constitué des nombres de la forme $\frac{1}{n}$, où n est un entier naturel non nul. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?
- ☐ **A** Parmi les amas A tel que $E \subset A$, il en est un de plus petite mesure possible
- ☐ **B** Tout amas A tel que $E \subset A$ a une composante de la forme $]0; a[$
- ☐ **C** Tout amas A tel que $E \subset A$ est de mesure supérieure ou égale à 1
- ☐ **D** Il n'y a pas d'amas A tel que $E \subset A$
- ☒ Il existe un amas A tel que $E \subset A$ et qui soit mesure inférieure ou égal à 10^{-3}
- ☐ **M30** On reprend l'ensemble E de la question **M29**, et on considère maintenant l'ensemble $F = [0; 1] \setminus E$, constitué de tous les réels compris entre 0 et 1 sauf les inverses des entiers naturels non nuls. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?
- ☐ **A** Il existe un amas de mesure 1 inclus dans F
- ☐ **B** Parmi les amas inclus dans F , il en existe un de plus grande mesure possible
- ☐ **C** F est un amas
- ☐ **D** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☒ Quel que soit $a \in]0; 1[$, il existe un amas de mesure a inclus dans F

Exercice 3. Questions variées d'arithmétique

- ☐ **L5** Donner le plus grand diviseur commun de 4368 et 1064.
- ☐ **M31** Dans l'écriture décimale de 3^{2026} , le chiffre des unités est :
- ☐ **A** 5 ☐ **B** 0 ☐ **C** 3 ☒ 9 ☐ **E** 1
- ☐ **M32** Combien 1000 a-t-il de diviseurs qui sont à la fois positifs et pairs ?
- ☒ 12 ☐ **B** 500 ☐ **C** 6 ☐ **D** 7 ☐ **E** 9

☐ **M33** Combien y a-t-il de nombres entiers n tels que $50 \leq n \leq 99$ et qui sont divisibles par 2 et par 3?

- ☐ A 11 ☐ B 10 ☐ C 12 ☐ D aucune des autres réponses proposées ☒ 8

☐ **M34** Combien y a-t-il d'entiers naturels n tels que $1 \leq n \leq 267$ et qui sont divisibles par au moins un des nombres 2 et 3?

- ☐ A aucune des autres réponses proposées ☒ 178 ☐ C 223 ☐ D 179 ☐ E 222

☐ **R3** Montrer par récurrence sur $k \geq 1$ l'énoncé suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, le produit $(n+1)(n+2) \cdots (n+k)$ est divisible par $k!$. On pourra s'intéresser à la différence $(n+2)(n+3) \cdots (n+k+1) - (n+1)(n+2) \cdots (n+k)$. On attend une démonstration élémentaire, n'utilisant notamment pas le cours sur les coefficients binomiaux.

☐ **M35** Le plus grand entier naturel qui, pour tout entier $n \geq 1$, divise le produit $(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)$ est :

- ☐ A aucune des autres réponses ☐ B 15 ☐ C 1 ☐ D 2 ☒ 3

☐ **M36** Soit p un nombre premier impair. Combien y a-t-il de couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 + p = y^2$?

- ☐ A Une infinité ☐ B 0 ☐ C $\frac{p-1}{2}$ ☒ 1 ☐ E p

☐ **M37** On forme à partir de deux chiffres a et b (dans $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$) des nombres m et n écrits ab et ba en base 10. Combien y a-t-il de couples $(a; b)$ où $a < b$ et $n - m$ est divisible par 9 mais n'est divisible par aucun entier strictement supérieur à 9?

- ☒ 9 ☐ B 10 ☐ C 16 ☐ D 8 ☐ E aucune des autres réponses proposées

☐ **M38** Combien y a-t-il d'entiers n tels que $1 \leq n \leq 100$ et 48 divise $n^3 + 20n$?

- ☐ A 25 ☐ B 24 ☐ C 49 ☒ 50 ☐ E 100

☐ **M39** Pour tout couple $(a; b)$ d'entiers naturels non nuls premiers entre eux, le pgcd de $a + b$ et $a^2 + b^2 - ab$ vaut :

- ☐ A aucune des autres réponses proposées
☐ B 1
☐ C ab
☒ 1 ou 3, et les deux cas sont possibles selon le choix de a et b
☐ E 1 ou ab , et les deux cas sont possibles selon le choix de a et b

☐ **M40** Combien y a-t-il d'entiers $n \geq 4$ tels que $n - 3$ divise $n^3 - 3$?

- ☐ A 2 ☐ B Une infinité ☐ C 6 ☒ 8 ☐ E 10

Exercice 4. Image d'un cercle par diverses transformations du plan

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, ce qui permet de repérer les points par des affixes. On note $M(z)$ le point d'affixe z .

On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Pour un point Ω et un réel $r > 0$, on note $\mathcal{C}(\Omega; r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r . On note $\mathcal{U}$ le cercle $\mathcal{C}(O; 1)$.

Pour une fonction f qui associe à un point du plan un autre point du plan, et une partie $\mathcal{X}$ du plan, on note $f(\mathcal{X})$ l'ensemble formé des points $f(A)$ où le point A parcourt l'ensemble $\mathcal{X}$. On dit que $f(\mathcal{X})$ est l'**image** de $\mathcal{X}$ par f .

□ **M41** On note f l'application qui associe au point $M(z)$ le point $M(z + 2i)$. L'image du cercle $\mathcal{U}$ par f est :

- ☐ **A** un disque ☒ un cercle ☐ **C** un segment de droite
☐ **D** la réunion d'un cercle et d'une droite ☐ **E** aucune des autres réponses proposées

□ **M42** Quand le nombre complexe z décrit $\mathbf{U}$ la valeur maximale prise par $|z + 2i|$ est :

- ☒ **A** 3 ☐ **B** $\sqrt{5}$ ☐ **C** 2 ☐ **D** $2i + 1$ ☐ **E** $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

□ **M43** Quand le nombre complexe z décrit $\mathbf{U}$ le nombre $|z + 2i|$ décrit :

- ☐ **A** $[0; 3]$ ☐ **B** $[0; 2]$ ☐ **C** Un sous-ensemble strict de $[1; 3]$ ☐ **D** $[2i - 1; 2i + 1]$
☒ **E** $[1; 3]$

△ **L6** Soit $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Indiquer la valeur maximale prise par le nombre $|z + re^{i\alpha}|$ quand z décrit $\mathbf{U}$.

□ **M44** On note g l'application qui associe au point $M(z)$ le point $M(z^2)$. L'image du cercle $\mathcal{U}$ par g est :

- ☐ **A** le cercle $\mathcal{C}(O; 2)$ ☐ **B** un sous-ensemble strict de $\mathcal{U}$ ☐ **C** une autre réponse
☒ **D** le cercle $\mathcal{U}$ ☐ **E** un demi-cercle

Image d'un cercle par une application polynomiale de degré 2

Dans toute cette partie, on considère l'application h qui au point $A = M(z)$ associe le point $h(A) = M(z^2 + z + 1)$.

On cherche à comprendre la nature de l'ensemble image $h(\mathcal{U})$.

□ **M45** Pour tout réel θ , la distance de O au point $M(z^2 + z + 1)$ est, lorsque $z = e^{i\theta}$:

- ☐ **A** $|\cos \theta| + |\sin \theta|$
☐ **B** $2|\cos \theta| + 1$
☒ $|1 + 2 \cos \theta|$
☐ **D** $2|\cos \theta|$
☐ **E** $1 + 2 \cos \theta$

□ **M46** Quand le point A décrit $\mathcal{U}$, la distance de O au point $h(A)$ décrit :

- ☐ **A** $[0; 1] \cup [2; 3]$
☐ **B** $[-1; 3]$
☒ $[0; 3]$
☐ **D** $[0; 2]$
☐ **E** $[1; 3]$

□ **M47** L'ensemble $h(\mathcal{U})$:

- ☐ **A** n'est symétrique ni par rapport à l'axe des abscisses, ni par rapport à l'axe des ordonnées
☐ **B** est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'axe des ordonnées
☒ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, mais pas par rapport à l'axe des ordonnées
☐ **D** est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, mais pas par rapport à l'axe des abscisses

□ **M48** Les abscisses des points d'intersection de $h(\mathcal{U})$ avec l'axe des abscisses sont :

- ☐ **A** -1 et 1
☒ $0, 1$ et 3
☐ **C** 1 et 3
☐ **D** tous les éléments de l'intervalle $[0; 3]$
☐ **E** $-1, 1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

□ **M49** Combien de points de $h(\mathcal{U})$ appartiennent-ils à l'axe des ordonnées ?

- ☐ **A** une infinité
 ☐ **B** 1
☒ 3
☐ **D** 2
☐ **E** 4

△ **L7** Indiquer l'abscisse minimale possible pour un point de $h(\mathcal{U})$.

□ **M50** L'ensemble $h(\mathcal{U})$ est :

- ☒ aucune des autres réponses proposées
☐ **B** la réunion de deux cercles
☐ **C** la réunion de deux segments de droite
☐ **D** le disque de centre O et de rayon 3 .
☐ **E** le cercle $\mathcal{C}(O; 3)$

△ **R4** Donner une représentation graphique aussi précise que possible de l'ensemble $h(\mathcal{U})$. On placera notamment les axes de coordonnées et les points d'intersection de $h(\mathcal{U})$ avec ceux-ci. Aucune justification n'est demandée.

Exercice 5. Blocs d'entiers

Lorsque a et b désignent deux entiers naturels tels que $a \leq b$, on note $\llbracket a; b \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leq k \leq b$. Par exemple, $\llbracket 2; 4 \rrbracket = \{2; 3; 4\}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par Ω_n l'ensemble des parties à n éléments de $\llbracket 1; 2n \rrbracket$, et on le munit de la loi de probabilité uniforme, notée P .

Lorsque A est un ensemble d'entiers, on appelle **bloc** de A tout sous-ensemble de A de la forme $\llbracket a; b \rrbracket$ où

$$1 \leq a \leq b \leq 2n \text{ avec } (a = 1 \text{ ou } a - 1 \notin A) \text{ et } (b = 2n \text{ ou } b + 1 \notin A).$$

Par exemple, $\{1; 2; 5\}$ a deux blocs : $\llbracket 1; 2 \rrbracket$ et $\{5\}$. L'ensemble $\{2; 4; 6; 7\}$ a trois blocs : $\{2\}$, $\{4\}$ et $\llbracket 6; 7 \rrbracket$.

On note X_n la variable aléatoire qui, à toute partie A à n éléments de $\llbracket 1; 2n \rrbracket$, associe le nombre de blocs de A . La variable X_1 est donc constante, de valeur 1.

☐ **M51** Le nombre de blocs de $\{1; 2; 4; 6; 7; 10\}$ est :

- ☐ A 1 ☐ B 2 ☒ C 4 ☐ D 6 ☐ E 3

☐ **M52** Les nombres de blocs possibles pour un A dans Ω_n sont les éléments de :

- ☒ A $\llbracket 1; n \rrbracket$ ☐ B aucun des autres ensembles proposés, en toute généralité ☐ C $\llbracket 0; n \rrbracket$
☐ D $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$ ☐ E $\{1; n\}$

☐ **R5** Justifier la réponse à la question **M52**.

☐ **M53** Le nombre d'éléments de Ω_n est :

- ☐ A $(2n)!$ ☐ B 2^n ☒ C $\binom{2n}{n}$ ☐ D $(2n)^n$
☐ E aucune des valeurs proposées, en toute généralité

☐ **L8** Donner le nombre d'éléments de Ω_4 qui possèdent un bloc ayant exactement 3 éléments.

☐ **M54** La probabilité $P(X_2 = 1)$ vaut :

- ☐ A $\frac{1}{4}$ ☐ B $\frac{3}{4}$ ☐ C $\frac{2}{3}$ ☐ D $\frac{1}{3}$ ☒ E $\frac{1}{2}$

☐ **M55** La probabilité $P(X_3 = 1)$ vaut :

- ☐ A $\frac{1}{10}$ ☒ B $\frac{1}{5}$ ☐ C aucune des autres valeurs proposées ☐ D $\frac{1}{3}$ ☐ E $\frac{1}{2}$

□ **M56** La probabilité $P(X_3 = 3)$ vaut :

- ☐ **A** $\frac{1}{3}$
☐ **B** aucune des autres valeurs proposées
 ☒ $\frac{1}{5}$
☐ **D** $\frac{1}{10}$
☐ **E** $\frac{3}{20}$

□ **M57** L'espérance de X_3 vaut :

- ☐ **A** $\frac{18}{10}$
☐ **B** $\frac{17}{5}$
☒ 2
☐ **D** $\frac{19}{10}$
☐ **E** $\frac{17}{10}$

Blocs et complémentation

On fixe ici l'entier $n \geq 2$. Pour A dans Ω_n , on note A^c son complémentaire, autrement dit l'ensemble $\llbracket 1; 2n \rrbracket \setminus A$: c'est un élément de Ω_n .

□ **M58** Pour tout A dans Ω_n , on a :

- ☐ **A** $X_n(A^c) \leq X_n(A)$
☐ **B** $X_n(A) + X_n(A^c) = n + 1$
☒ $|X_n(A) - X_n(A^c)| \leq 1$
☐ **D** aucune des autres relations, en toute généralité
☐ **E** $X_n(A) \leq X_n(A^c)$

□ **M59** Laquelle des conditions suivantes est équivalente à l'identité $X_n(A) = X_n(A^c)$?

- ☐ **A** A contient 1 et 2
☐ **B** A ne contient ni 1 ni $2n$
☐ **C** A contient 1 et $2n$
☐ **D** Aucune des autres conditions citées, en toute généralité
☒ A contient exactement un des éléments 1 et $2n$

On note :

- r_n la probabilité que $X_n(A) = X_n(A^c)$;
- s_n la probabilité que $X_n(A) > X_n(A^c)$;
- t_n la probabilité que $X_n(A) < X_n(A^c)$.

□ **M60** Quelle affirmation est vraie ?

- ☒ $s_n = t_n$ quel que soit n
☐ **B** $s_n > t_n$ pour certaines valeurs de n , et $s_n < t_n$ pour d'autres valeurs de n
☐ **C** $s_n \geq t_n$ quel que soit n , et pour certaines valeurs de n on a $s_n > t_n$
☐ **D** $s_n \leq t_n$ quel que soit n , et pour certaines valeurs de n on a $s_n < t_n$

□ **M61** Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ **A** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☒ **B** $r_n > \frac{1}{2}$ quel que soit n
- ☐ **C** $r_n < \frac{1}{2}$ quel que soit n
- ☐ **D** $r_n \geq \frac{1}{2}$ quel que soit n , et pour certaines valeurs de n on a $r_n = \frac{1}{2}$
- ☐ **E** Pour certaines valeurs de n on a $r_n > \frac{1}{2}$, et pour d'autres on a $r_n < \frac{1}{2}$

□ **M62** Lorsque n tend vers $+\infty$, la probabilité s_n tend vers :

- ☐ **A** 0 ☐ **B** $\frac{1}{3}$ ☐ **C** $\frac{1}{2}$ ☒ **D** $\frac{1}{4}$ ☐ **E** 1

Partitions d'entiers

Pour des entiers $n \geq 1$ et $k \geq 0$, on note :

- $a(n; k)$ le nombre de listes $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ d'entiers naturels non nuls tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, sous réserve que $k > 0$;
- $b(n; k)$ le nombre de listes $(y_0; y_1; \dots; y_{k+1})$ d'entiers naturels tels que $y_0 + y_1 + \dots + y_k + y_{k+1} = n$ et $y_1, \dots, y_k$ soient tous non nuls (en revanche, y_0 et y_{k+1} peuvent être nuls).

□ **M63** Parmi les affirmations qui suivent, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

- ☐ **A** L'égalité $b(n; k) = a(n + 2; k + 1)$ est toujours vraie
- ☐ **B** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $b(n; k) = a(n + 2; k + 1)$
- ☐ **C** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☐ **D** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $b(n; k) = a(n + 2; k + 2)$
- ☒ **E** L'égalité $b(n; k) = a(n + 2; k + 2)$ est toujours vraie

Dans les questions suivantes, on impose $k \geq 1$.

□ **M64** Parmi les affirmations qui suivent, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

- ☐ **A** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $a(n; k) = \binom{n}{k}$
- ☐ **B** L'égalité $a(n; k) = \binom{n}{k}$ est toujours vraie
- ☒ **C** L'égalité $a(n; k) = \binom{n-1}{k-1}$ est toujours vraie
- ☐ **D** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☐ **E** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $a(n; k) = \binom{n-1}{k-1}$

□ **M65** On note $B(n; k)$ le nombre d'éléments de Ω_n ayant exactement k blocs. Parmi les affirmations qui suivent, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

- ☐ **A** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k - 1)$
- ☐ **B** L'égalité $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k)$ est toujours vraie
- ☐ **C** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☒ **D** L'égalité $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k - 1)$ est toujours vraie
- ☐ **E** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k)$

□ **M66** Parmi les affirmations suivantes, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

- ☐ **A** Il existe une infinité d'entiers n pour lesquels il existe un entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $P(X_n = k) = P(X_n = n + 1 - k)$
- ☒ **B** L'égalité $P(X_n = k) = P(X_n = n + 1 - k)$ vaut quels que soient n et k
- ☐ **C** Il existe plusieurs couples $(n; k)$ tels que $P(X_n = k) = P(X_n = n + 1 - k)$
- ☐ **D** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☐ **E** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $P(X_n = k) = P(X_n = n + 1 - k)$

□ **M67** On note E_n l'espérance de la variable aléatoire X_n . Parmi les affirmations suivantes, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

- ☐ **A** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☐ **B** Il existe une quantité finie non nulle de valeurs de n pour lesquelles $E_n \neq \frac{n+1}{2}$
- ☐ **C** Il existe plusieurs entiers n tels que $E_n = \frac{n+1}{2}$
- ☐ **D** Il existe une infinité d'entiers n tels que $E_n = \frac{n+1}{2}$
- ☒ **E** L'égalité $E_n = \frac{n+1}{2}$ vaut quel que soit n