

Exercice 1. Pot pourri de calculs algébriques

□ **M1** Le nombre $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}}$ est égal à :

- ☐ **A** $\sqrt{3} + 2$ ☐ **B** $3 + 2\sqrt{2}$ ☒ $1 + 2\sqrt{2}$ ☐ **D** $-3 - 2\sqrt{2}$ ☐ **E** $-\sqrt{3} + \sqrt{2}$

□ **M2** Le domaine de définition de la fonction qui au réel x associe $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ est :

- ☒ aucun des autres ensembles proposés ☐ **B** $[-1; 1]$ ☐ **C** $[0; 1]$ ☐ **D** $[1; +\infty[$
☐ **E** $[-1; +\infty[$

□ **M3** On pose $a = 3 + 2\sqrt{5}$, $b = 4 + 3\sqrt{2}$ et $c = 4 + 2\sqrt{3}$. Quelle affirmation est vraie ?

- ☒ $c < a < b$ ☐ **B** $a < b < c$ ☐ **C** $b < a < c$
☐ **D** aucune des autres affirmations proposées n'est vraie ☐ **E** $a < c < b$

□ **M4** Lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $]0; +\infty[$, la plus petite valeur prise par $x + \frac{1}{4x}$ est :

- ☐ **A** $\frac{5}{4}$ ☒ 1 ☐ **C** $\frac{1}{2}$ ☐ **D** aucune des autres valeurs proposées ☐ **E** 0

△ **L1** Donner une expression simplifiée de $|x - |x|| + |-x - |x||$ lorsque x désigne un nombre réel.

□ **M5** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} > \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ est :

- ☐ **A** $]3 - \sqrt{10}; 3 + \sqrt{10}[$ ☐ **B** $[-2; 1[$ ☐ **C** $]3 + \sqrt{10}; +\infty[$ ☐ **D** $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
☒ $] -\infty; -2] \cup]3 + \sqrt{10}; +\infty[$

□ **M6** L'équation $e^{2x+1} - 2e^{x+1} - 2e^x + 4 = 0$ d'inconnue réelle x possède :

- ☐ **A** exactement deux solutions, de même signe
☐ **B** un nombre fini de solutions au moins égal à 3
☐ **C** une seule solution
☐ **D** une infinité de solutions
☒ exactement deux solutions, de signes opposés

□ **M7** Le nombre $(a+b+c)^3 + (-a-b+c)^3 + (-a+b-c)^3 + (a-b-c)^3$ (où $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$) :

☐ **A** est nul seulement si $a+b+c=0$

☐ **B** est nul pour un nombre fini de valeurs de $(a;b;c)$

☒ **C** est nul seulement si l'un au moins des réels a, b, c est nul

☐ **D** est non nul si les réels a, b, c ont des valeurs absolues distinctes deux à deux

☐ **E** est nul pour toute valeur de $(a;b;c)$

△ **L2** Soit x, y et z trois réels dont la somme est nulle. Indiquer la valeur de $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

□ **M8** Pour tout réel m on considère les polynômes $P(x) = x^2 + mx + 1$ et $Q(x) = x^2 + x + m$. Quelle affirmation est vraie ?

☒ **A** Les polynômes P et Q ont une racine réelle commune pour exactement une valeur de m

☐ **B** Les polynômes P et Q ont une racine réelle commune pour toute valeur de m

☐ **C** Les polynômes P et Q ont une racine réelle commune pour plusieurs valeurs de m

☐ **D** Les polynômes P et Q ont deux racines réelles communes pour au moins une valeur de m

☐ **E** Les polynômes P et Q n'ont jamais de racine réelle commune

□ **M9** On considère le produit

$$P = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{2^3}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{2^4}}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^{2^{2^9}}}\right).$$

En simplifiant $\left(1 - \frac{1}{2}\right) P$, on trouve que, parmi les valeurs proposées, la plus proche de P est :

☐ **A** 1,999

☒ **B** 2

☐ **C** 1,51

☐ **D** 2,00001

☐ **E** 1024

□ **M10** Pour un réel y , on note $\lfloor y \rfloor$ sa partie entière, définie comme l'unique entier k tel que $k \leq y < k+1$. Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, le nombre réel $\lfloor |x| - \lfloor x \rfloor \rfloor - \lfloor |x| - \lfloor -x \rfloor \rfloor$ décrit :

☐ **A** un ensemble fini

☐ **B** aucune des autres solutions proposées

☐ **C** $\mathbb{R}$

☒ **D** $\mathbb{Z}$

☐ **E** $\mathbb{N}$

Exercice 2. Amas de nombres réels

Un intervalle ouvert borné est un ensemble de la forme $]a; b[$ pour deux réels $a < b$. On prendra garde au fait que l'ensemble vide n'est pas un intervalle ouvert borné selon notre définition.

On rappelle que la réunion $A_1 \cup \dots \cup A_n$ de sous-ensembles $A_1, \dots, A_n$ de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels appartenant à au moins l'un des ensembles A_i . On rappelle que l'intersection de deux ensembles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble

des éléments appartenant à la fois à A et à B . On rappelle enfin qu'un ensemble A est **inclus** dans un ensemble B , et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B .

On appelle **amas** toute réunion (finie non vide) d'intervalles ouverts bornés, peu importe leur disposition. Par exemple, $]0; 1[\cup]2; 5[\cup]-1; 3[$ est un amas, et $]0; 10[$ en est aussi un.

Pour un amas A , on admet qu'il existe une unique écriture $A =]a_1; b_1[\cup]a_2; b_2[\cup \dots \cup]a_n; b_n[$ où $n \geq 1$ est un entier et $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$. On dit que les intervalles $]a_i; b_i[$ sont les **composantes** de A , et l'entier n est donc le nombre de composantes de A . Bien entendu, lorsque A est un simple intervalle ouvert borné, l'écriture précédente se limite à $n = 1$. Enfin, la **mesure** de l'amas A est la quantité

$$\mu(A) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n).$$

Quelques exemples

☐ **M11** Le nombre de composantes de l'amas $]0; 2[\cup]1; 3[$ vaut :

☐ **A** aucune des autres propositions ☒ **B** 1 ☐ **C** 2 ☐ **D** 3 ☐ **E** 0

☐ **M12** La mesure de l'amas $]0; 2[\cup]1; 3[$ vaut :

☐ **A** 2 ☒ **B** 3 ☐ **C** 1 ☐ **D** 4 ☐ **E** 0

☐ **M13** Le nombre de composantes de l'amas $] -2; -1[\cup]0; 2[\cup]1; 3[$ vaut :

☐ **A** 1 ☐ **B** aucune des autres propositions ☒ **C** 2 ☐ **D** 0 ☐ **E** 3

☐ **L3** Donner un amas à 3 composantes et de mesure 1.

☐ **M14** L'ensemble des nombres réels vérifiant $-4 < x^2 - 4x < 5$:

- ☒ est un amas possédant 2 composantes
☐ **B** est un amas possédant 4 composantes
☐ **C** n'est pas un amas
☐ **D** est un amas possédant 3 composantes
☐ **E** est un amas possédant 1 composante

☐ **M15** L'ensemble des nombres réels vérifiant $-4 \leq x^2 - 4x < 5$:

- ☐ **A** est un amas possédant 4 composantes
☒ est un amas possédant 1 composante
☐ **C** est un amas possédant 3 composantes
☐ **D** n'est pas un amas
☐ **E** est un amas possédant 2 composantes

☐ **M16** L'ensemble des nombres réels vérifiant $-4 < x^2 - 4x \leq 5$:

- ☐ **A** est un amas possédant 1 composante
☒ n'est pas un amas
☐ **C** est un amas possédant 4 composantes
☐ **D** est un amas possédant 3 composantes
☐ **E** est un amas possédant 2 composantes

☐ **R1** Justifier la réponse à la question **M16**.

☐ **L4** On considère l'amas A formé des réels *non entiers* compris entre 1 et 2026. Préciser le nombre n de composantes

de A , ainsi que la mesure $\mu(A)$ de A .

□ **M17** On considère l'amas A formé de la réunion des intervalles de la forme $]n; n+2+(-1)^n[$ où n parcourt $\{1; 2; 3; \dots; 2026\}$. Le nombre de composantes de A est :

- ☒ 2 ☐ 2026 ☐ 1013 ☐ 1012 ☐ 1

□ **M18** Comme dans la question **M17**, on considère l'amas A formé de la réunion des intervalles de la forme $]n; n+2+(-1)^n[$ où n parcourt $\{1; 2; 3; \dots; 2026\}$. La mesure de A est :

- ☐ 1014 ☐ 2026 ☐ 4052 ☒ 2028 ☐ 1013

Opérations sur les amas

□ **M19** Pour deux intervalles ouverts bornés $]a; b[$ et $]c; d[$, l'inclusion $]a; b[\subset]c; d[$ est systématiquement équivalente à la condition :

- ☐ $a < c$ et $b < d$
☐ aucune des autres conditions proposées
☒ $c \leq a$ et $b \leq d$
☐ $c < a$ et $b < d$
☐ $a \leq c$ et $b \leq d$

□ **M20** Pour deux intervalles ouverts bornés $]a; b[$ et $]c; d[$, l'intersection $]a; b[\cap]c; d[$:

- ☐ est systématiquement vide
☐ aucune des autres réponses proposées n'est correcte
☐ est systématiquement un intervalle ouvert borné
☒ est systématiquement un intervalle ouvert borné ou l'ensemble vide, et les deux cas sont possibles

□ **M21** Pour deux intervalles ouverts bornés $]a; b[$ et $]c; d[$, les nombres de composantes possibles pour l'amas $]a; b[\cup]c; d[$ sont :

- ☒ 1 et 2 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 1, 2 et 4 ☐ aucune des autres réponses proposées

□ **M22** Soit A un amas et x et y deux réels tels que $x < y$. L'affirmation la plus forte que l'on puisse soutenir est que :

- ☐ Si x et y appartiennent à la même composante de A alors $[x; y] \subset A$
☒ x et y appartiennent à la même composante de A si et seulement si $[x; y] \subset A$
☐ Si $[x; y] \subset A$ alors x et y appartiennent à la même composante de A
☐ aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

☐ **M23** On fixe un amas A à n composantes. Pour un intervalle ouvert non vide $]x; y[$, les nombres de composantes possibles pour l'amas $A \cup]x; y[$ sont :

☐ **A** 1 et n

☐ **B** 1, n et $n + 1$

☐ **C** aucune des autres réponses proposées

☐ **D** les entiers compris entre 1 et n au sens large

☒ les entiers compris entre 1 et $n + 1$ au sens large

☐ **R2** Justifier la réponse à la question **M23**.

Dominique essaie de s'appuyer sur la question **M22** pour démontrer que si un amas A est la réunion de n intervalles ouverts $I_1, \dots, I_n$, alors A possède au plus n composantes. Voici son raisonnement :

1. « Je note p le nombre de composantes de A , et dans chacune des composantes de A je choisis un nombre. »
2. « J'ordonne les nombres ainsi obtenus pour les écrire $x_1 < \dots < x_p$. »
3. « Pour chaque entier i compris entre 1 et p , le nombre x_i est dans l'un des intervalles $I_1, \dots, I_n$. »
4. « Je conclus que $p \leq n$. »

☐ **M24** Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

- ☒ La conclusion de Dominique est juste, mais elle a oublié de préciser que dans l'étape 3, deux nombres x_i et x_j , avec $i \neq j$, ne peuvent pas appartenir au même intervalle I_k
- ☐ La conclusion de Dominique est juste, mais elle a oublié de préciser que dans l'étape 3, un nombre x_i ne peut pas appartenir à plusieurs intervalles I_k
- ☐ La conclusion de Dominique est juste, mais elle a oublié de préciser que dans l'étape 3, en faisant varier i on obtient tous les intervalles I_k possibles
- ☐ La conclusion de Dominique est juste, et son raisonnement est complet
- ☐ La conclusion de Dominique est fausse

☐ **M25** On réunit n amas (avec $n \geq 2$) ayant chacun n composantes. La meilleure inégalité que l'on puisse alors affirmer est que la réunion de ces amas a un nombre de composantes inférieur ou égal à :

- ☐ $2n$ ☐ n ☒ n^2 ☐ aucun des nombres proposés, en général ☐ n^n

☐ **M26** Pour deux amas A et B ayant respectivement n et p composantes, l'affirmation la plus forte que l'on puisse soutenir est que si $A \cap B$ est un amas alors son nombre de composantes est inférieur ou égal à :

- ☐ np ☒ $n + p - 1$ ☐ le plus grand entier parmi n et p ☐ $n + p$
- ☐ aucun des nombres proposés

Image d'un amas

☐ **M27** Étant donné un amas A , l'ensemble des réels x^2 , lorsque x parcourt A :

- ☐ n'est jamais un amas
- ☐ est toujours un amas
- ☐ est un amas si 0 appartient à A , et n'en est pas un sinon
- ☒ est un amas si 0 n'appartient pas à A , et n'en est pas un sinon
- ☐ est un amas si tous les éléments de A sont positifs, et n'en est pas un sinon

- ☐ **M28** Étant donné un amas A ne contenant pas 0, l'ensemble des réels $\frac{1}{x}$, lorsque x parcourt A :
- ☐ **A** est un amas si tous les éléments de A sont strictement positifs, mais peut ne pas être un amas dans le cas contraire
- ☒ aucune des autres réponses proposées n'est vraie
- ☐ **C** n'est jamais un amas
- ☐ **D** est toujours un amas

Amas à contraintes

- ☐ **M29** On considère l'ensemble E constitué des nombres de la forme $\frac{1}{n}$, où n est un entier naturel non nul. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?
- ☐ **A** Parmi les amas A tel que $E \subset A$, il en est un de plus petite mesure possible
- ☐ **B** Tout amas A tel que $E \subset A$ a une composante de la forme $]0; a[$
- ☐ **C** Tout amas A tel que $E \subset A$ est de mesure supérieure ou égale à 1
- ☐ **D** Il n'y a pas d'amas A tel que $E \subset A$
- ☒ Il existe un amas A tel que $E \subset A$ et qui soit mesure inférieure ou égal à 10^{-3}
- ☐ **M30** On reprend l'ensemble E de la question **M29**, et on considère maintenant l'ensemble $F = [0; 1] \setminus E$, constitué de tous les réels compris entre 0 et 1 sauf les inverses des entiers naturels non nuls. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?
- ☐ **A** Il existe un amas de mesure 1 inclus dans F
- ☐ **B** Parmi les amas inclus dans F , il en existe un de plus grande mesure possible
- ☐ **C** F est un amas
- ☐ **D** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☒ Quel que soit $a \in]0; 1[$, il existe un amas de mesure a inclus dans F

Exercice 3. Suites de radicaux imbriqués

Une première suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$ définie comme suit : pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \underbrace{\sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{n - 2 + \sqrt{\cdots \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}}}_{n \text{ racines carrées}}.$$

Ainsi $u_1 = \sqrt{1} = 1$, $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{1}} = \sqrt{3} \simeq 1,73$ et $u_3 = \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}} = \sqrt{3 + \sqrt{3}} \simeq 2,18$.

☐ **M31** Vrai ou faux? La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$.

☐ **A** Faux

☒ **Vrai**

☐ **L5** Donner une égalité reliant u_n^2 et u_{n-1} , pour tout $n \geq 2$.

☐ **R3** Établir, pour tout entier $n \geq 1$, la majoration $u_n \leq n$.

☐ **M32** La suite de terme général $\frac{u_n}{n}$:

☐ **A** converge vers $\frac{1}{2}$

☐ **B** n'a pas de limite

☐ **C** converge vers 1

☒ **converge vers 0**

☐ **E** tend vers $+\infty$

☐ **M33** La suite de terme général $\frac{u_n}{\sqrt{n}}$:

☐ **A** n'a pas de limite

☒ **converge vers 1**

☐ **C** converge vers 0

☐ **D** tend vers $+\infty$

☐ **E** converge vers $\frac{1}{2}$

☐ **M34** Quand le réel x tend vers 0, le réel $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ tend vers :

☐ **A** 1

☐ **B** $\sqrt{2}$

☐ **C** 0

☒ **$\frac{1}{2}$**

☐ **E** $+\infty$

☐ **M35** La suite de terme général $u_n - \sqrt{n}$ a pour limite :

☐ **A** une limite finie strictement supérieure à 1

☐ **B** 0

☒ **$\frac{1}{2}$**

☐ **D** $+\infty$

☐ **E** 1

Une deuxième suite

On considère la suite réelle $(v_n)_{n \geq 1}$ définie comme suit : pour tout entier naturel n non nul,

$$v_n = \underbrace{\sqrt{n - \sqrt{n - 1 - \sqrt{n - 2 - \sqrt{\cdots \sqrt{2 - \sqrt{1}}}}}}}_{n \text{ racines carrées}}.$$

Ainsi $v_1 = \sqrt{1} = 1$, $v_2 = \sqrt{2 - \sqrt{1}} = 1$ et $v_3 = \sqrt{3 - \sqrt{2 - \sqrt{1}}} = \sqrt{2} \simeq 1,414$.

□ **M36** On peut affirmer que pour tout entier $n \geq 2$:

- ☐ **A** $v_n = \sqrt{n} - v_{n-1}$
 ☐ **B** $v_n = \sqrt{n + v_{n-1}}$
 ☒ $v_n = \sqrt{n - v_{n-1}}$
 ☐ **D** $v_n = (n - v_{n-1})^2$
☐ **E** aucune des autres réponses proposées

□ **M37** Si la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ a une limite alors cette limite est :

- ☐ **A** 0
 ☒ $+\infty$
 ☐ **C** $\sqrt{n}$
 ☐ **D** 1
 ☐ **E** π

□ **M38** La suite de terme général $\frac{v_n}{n}$ a pour limite :

- ☒ 0
 ☐ **B** aucune des autres réponses proposées
 ☐ **C** $\sqrt{2}$
 ☐ **D** 1
 ☐ **E** $+\infty$

□ **M39** La suite de terme général $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$ a pour limite :

- ☐ **A** $\sqrt{2}$
 ☐ **B** 0
 ☒ 1
 ☐ **D** $+\infty$
 ☐ **E** aucune des autres réponses proposées

□ **M40** La suite de terme général $v_n - \sqrt{n}$ a pour limite :

- ☒ $-\frac{1}{2}$
 ☐ **B** une limite finie supérieure ou égale à 1
 ☐ **C** 0
 ☐ **D** $-\infty$
 ☐ **E** $\frac{1}{2}$

Une troisième suite

On considère désormais la suite réelle $(w_n)_{n \geq 1}$ telle que, pour tout entier naturel n non nul,

$$w_n = \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{\cdots + \sqrt{n}}}}}}_{n \text{ racines carrées}}.$$

On introduit également deux autres suites par les formules :

$$x_n = \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}}}_{n \text{ racines carrées}} \quad \text{et} \quad y_n = \underbrace{\sqrt{2^1 + \sqrt{2^2 + \sqrt{2^4 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2^{2^n}}}}}}}_{n \text{ racines carrées}}.$$

Par exemple, $y_2 = \sqrt{2 + \sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2$ et $y_3 = \sqrt{2 + \sqrt{4 + \sqrt{16}}} = \sqrt{2 + \sqrt{8}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$.

□ **M41** Laquelle des identités suivantes est vraie ?

☐ **A** aucune des autres identités proposées

☒ $y_n = \sqrt{2} x_n$ pour tout $n \geq 2$

☐ **C** $y_n = \sqrt{2 x_{n-1}}$ pour tout $n \geq 2$

☐ **D** $y_n = 2 x_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$

☐ **E** $y_n = 2 x_n$ pour tout $n \geq 2$

Dans la suite de l'exercice on note $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2}$. On remarquera que $\alpha = \sqrt{\alpha + 1}$.

□ **M42** Parmi les affirmations suivantes, quelle est la plus précise que l'on puisse soutenir ?

☐ **A** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

☐ **B** $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x_n - \alpha|$ pour tout $n \geq 1$

☒ $|x_{n+1} - \alpha| \leq \beta^{-1} |x_n - \alpha|$ pour tout $n \geq 1$

☐ **D** $|x_{n+1} - \alpha| \leq \alpha^{-1} |x_n - \alpha|$ pour tout $n \geq 1$

☐ **E** $|x_{n+1} - \alpha| \leq |x_n - \alpha|$ pour tout $n \geq 1$

△ **L6** Donner, sous la forme la plus simple possible, la limite de la suite $(y_n)_{n \geq 1}$.

△ **R4** En rassemblant les éléments précédemment obtenus, démontrer que $(w_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Exercice 4. Composition de transformations du plan

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On s'intéresse ici à des transformations du plan, à savoir des fonctions qui à un point du plan associent un autre point du plan. Un exemple de transformation du plan est la fonction Φ qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point de coordonnées $(x^3; y^3)$, noté $\Phi(M)$.

Pour deux transformations F et G du plan, la **composée** $G \circ F$ est la transformation qui à tout point M associe le point $G(F(M))$, image du point $F(M)$ par la transformation G .

Symétrie orthogonale axiale

On considère ici la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by = c$ pour des réels a, b, c tels que a et b ne soient pas tous les deux nuls.

On note S la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

□ **M43** Soit M un point du plan, de coordonnées $(x; y)$. La perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M est l'ensemble des points dont les coordonnées $(x'; y')$ vérifient :

☐ **A** $x' = x + \lambda b$ et $y' = y - \lambda a$ pour un réel λ

☒ $x' = x + \lambda a$ et $y' = y + \lambda b$ pour un réel λ

☐ **C** aucune des autres solutions proposées

☐ **D** $x' = x + \lambda a$ et $y' = y - \lambda b$ pour un réel λ

☐ **E** $x' = x + \lambda b$ et $y' = y + \lambda a$ pour un réel λ

□ **M44** Soit M un point du plan, de coordonnées $(x; y)$. L'image du point M par la symétrie S est le point M' de coordonnées $(x'; y')$ où :

☐ **A** $x' = \frac{(b^2 - a^2)x + 2aby + 2ac}{a^2 + b^2}$ et $y' = \frac{(a^2 - b^2)y + 2abx + 2bc}{a^2 + b^2}$

☐ **B** $x' = \frac{(b^2 - a^2)x + 2aby + 2ac}{a^2 + b^2}$ et $y' = \frac{(a^2 - b^2)y - 2abx + 2bc}{a^2 + b^2}$

☒ $x' = \frac{(b^2 - a^2)x - 2aby + 2ac}{a^2 + b^2}$ et $y' = \frac{(a^2 - b^2)y - 2abx + 2bc}{a^2 + b^2}$

☐ **D** aucune des autres solutions proposées

☐ **E** $x' = \frac{(b^2 - a^2)x - 2aby + 2ac}{a^2 + b^2}$ et $y' = \frac{(a^2 - b^2)y + 2abx + 2bc}{a^2 + b^2}$

Composée d'une symétrie et d'une translation

On conserve ici les données de la partie précédente.

On considère un vecteur non nul $\vec{u}$ du plan, de coordonnées $(\alpha; \beta)$. On note T la translation de vecteur $\vec{u}$.

□ **M45** La composée $S \circ T$ est une symétrie orthogonale par rapport à une parallèle à la droite $\mathcal{D}$:

- ☐ **A** si et seulement si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$
- ☐ **B** dans tous les cas
- ☐ **C** si et seulement si $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $(a; -b)$
- ☒ **D** si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$
- ☐ **E** si et seulement si $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $(b; a)$

△ **L7** Lorsque $S \circ T$ est la symétrie orthogonale par rapport à une parallèle $\mathcal{D}'$ à la droite $\mathcal{D}$, déterminer un réel c' , exprimé en fonction de a, b, α, β et c , tel que $\mathcal{D}'$ ait pour équation $ax + by = c'$.

□ **M46** On peut dans tous les cas affirmer que $S \circ T$ est :

- ☐ **A** une symétrie centrale
- ☐ **B** une translation
- ☒ **C** égale à $S' \circ T_0$ pour une symétrie orthogonale S' dont l'axe est parallèle à $\mathcal{D}$ et pour une translation T_0 dont le vecteur $\vec{u}_0$ est parallèle à $\mathcal{D}$
- ☐ **D** une symétrie orthogonale
- ☐ **E** égale à $S' \circ T_0$ pour une symétrie orthogonale S' dont l'axe est parallèle à $\mathcal{D}$ et pour une translation T_0 dont le vecteur $\vec{u}_0$ est orthogonal à $\mathcal{D}$

Dans la suite de cet exercice, on note T' la translation de vecteur $-\vec{u}$.

□ **M47** La composée $T' \circ (S \circ T)$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite :

- ☐ **A** si et seulement si $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $(b; a)$
- ☒ **B** dans tous les cas
- ☐ **C** si et seulement si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$
- ☐ **D** si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$
- ☐ **E** si et seulement si $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $(a; -b)$

CORRECTION

□ **M48** La composée $T \circ (S \circ T)$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite :

■ si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$

□ **B** si et seulement si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

□ **C** si et seulement si $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $(b; a)$

□ **D** dans tous les cas

□ **E** si et seulement si $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $(a; -b)$

Composées quadruples

On conserve les données et notations des parties précédentes.

- ☐ **M49** La composée $S \circ (T' \circ (S \circ T))$ est :
- ☐ **A** aucune des autres solutions proposées, en toute généralité
 - ☐ **B** une translation dont le vecteur est directeur de $\mathcal{D}$
 - ☐ **C** une symétrie orthogonale par rapport à une droite
 - ☒ une translation dont le vecteur est orthogonal à $\mathcal{D}$
 - ☐ **E** une symétrie centrale
- ☐ **M50** La composée $S \circ (T \circ (S \circ T))$ est :
- ☐ **A** aucune des autres solutions proposées, en toute généralité
 - ☐ **B** une symétrie orthogonale par rapport à une droite
 - ☒ une translation dont le vecteur est directeur de $\mathcal{D}$
 - ☐ **D** une symétrie centrale
 - ☐ **E** une translation dont le vecteur est orthogonal à $\mathcal{D}$

Exercice 5. Blocs d'entiers

Lorsque a et b désignent deux entiers naturels tels que $a \leq b$, on note $\llbracket a; b \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leq k \leq b$. Par exemple, $\llbracket 2; 4 \rrbracket = \{2; 3; 4\}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par Ω_n l'ensemble des parties à n éléments de $\llbracket 1; 2n \rrbracket$, et on le munit de la loi de probabilité uniforme, notée P .

Lorsque A est un ensemble d'entiers, on appelle **bloc** de A tout sous-ensemble de A de la forme $\llbracket a; b \rrbracket$ où

$$1 \leq a \leq b \leq 2n \text{ avec } (a = 1 \text{ ou } a - 1 \notin A) \text{ et } (b = 2n \text{ ou } b + 1 \notin A).$$

Par exemple, $\{1; 2; 5\}$ a deux blocs : $\llbracket 1; 2 \rrbracket$ et $\{5\}$. L'ensemble $\{2; 4; 6; 7\}$ a trois blocs : $\{2\}$, $\{4\}$ et $\llbracket 6; 7 \rrbracket$.

On note X_n la variable aléatoire qui, à toute partie A à n éléments de $\llbracket 1; 2n \rrbracket$, associe le nombre de blocs de A . La variable X_1 est donc constante, de valeur 1.

- ☐ **M51** Le nombre de blocs de $\{1; 2; 4; 6; 7; 10\}$ est :

☐ **A** 3 ☒ 4 ☐ **C** 2 ☐ **D** 1 ☐ **E** 6

□ **M52** Les nombres de blocs possibles pour un A dans Ω_n sont les éléments de :

- ☐ **A** $\{1; n\}$
 ☐ **B** $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$
 ☒ $\llbracket 1; n \rrbracket$
 ☐ **D** $\llbracket 0; n \rrbracket$
☐ **E** aucun des autres ensembles proposés, en toute généralité

△ **R5** Justifier la réponse à la question **M52**.

□ **M53** Le nombre d'éléments de Ω_n est :

- ☒ $\binom{2n}{n}$
 ☐ **B** aucune des valeurs proposées, en toute généralité
 ☐ **C** 2^n
 ☐ **D** $(2n)^n$
☐ **E** $(2n)!$

△ **L8** Donner le nombre d'éléments de Ω_4 qui possèdent un bloc ayant exactement 3 éléments.

□ **M54** La probabilité $P(X_2 = 1)$ vaut :

- ☐ **A** $\frac{1}{4}$
 ☒ $\frac{1}{2}$
 ☐ **C** $\frac{2}{3}$
 ☐ **D** $\frac{3}{4}$
 ☐ **E** $\frac{1}{3}$

□ **M55** La probabilité $P(X_3 = 1)$ vaut :

- ☐ **A** $\frac{1}{3}$
 ☒ $\frac{1}{5}$
 ☐ **C** aucune des autres valeurs proposées
 ☐ **D** $\frac{1}{2}$
 ☐ **E** $\frac{1}{10}$

□ **M56** La probabilité $P(X_3 = 3)$ vaut :

- ☐ **A** aucune des autres valeurs proposées
 ☐ **B** $\frac{1}{3}$
 ☐ **C** $\frac{1}{10}$
 ☒ $\frac{1}{5}$
 ☐ **E** $\frac{3}{20}$

□ **M57** L'espérance de X_3 vaut :

- ☐ **A** $\frac{19}{10}$
 ☐ **B** $\frac{17}{10}$
 ☐ **C** $\frac{17}{5}$
 ☒ 2
 ☐ **E** $\frac{18}{10}$

Blocs et complémentarité

On fixe ici l'entier $n \geq 2$. Pour A dans Ω_n , on note A^c son complémentaire, autrement dit l'ensemble $\llbracket 1; 2n \rrbracket \setminus A$: c'est un élément de Ω_n .

□ **M58** Pour tout A dans Ω_n , on a :

- ☐ **A** $X_n(A) \leq X_n(A^c)$
☐ **B** aucune des autres relations, en toute généralité
☐ **C** $X_n(A^c) \leq X_n(A)$
☐ **D** $X_n(A) + X_n(A^c) = n + 1$
☒ $|X_n(A) - X_n(A^c)| \leq 1$

CORRECTION

□ **M59** Laquelle des conditions suivantes est équivalente à l'identité $X_n(A) = X_n(A^c)$?

☐ **A** A contient 1 et $2n$

☐ **B** A contient 1 et 2

☐ **C** A ne contient ni 1 ni $2n$

☒ A contient exactement un des éléments 1 et $2n$

☐ **E** Aucune des autres conditions citées, en toute généralité

On note :

- r_n la probabilité que $X_n(A) = X_n(A^c)$;
- s_n la probabilité que $X_n(A) > X_n(A^c)$;
- t_n la probabilité que $X_n(A) < X_n(A^c)$.

☐ **M60** Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ **A** $s_n > t_n$ pour certaines valeurs de n , et $s_n < t_n$ pour d'autres valeurs de n
- ☐ **B** $s_n \leq t_n$ quel que soit n , et pour certaines valeurs de n on a $s_n < t_n$
- ☒ **C** $s_n = t_n$ quel que soit n
- ☐ **D** $s_n \geq t_n$ quel que soit n , et pour certaines valeurs de n on a $s_n > t_n$

☐ **M61** Quelle affirmation est vraie ?

- ☐ **A** $r_n < \frac{1}{2}$ quel que soit n
- ☐ **B** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☐ **C** Pour certaines valeurs de n on a $r_n > \frac{1}{2}$, et pour d'autres on a $r_n < \frac{1}{2}$
- ☒ **D** $r_n > \frac{1}{2}$ quel que soit n
- ☐ **E** $r_n \geq \frac{1}{2}$ quel que soit n , et pour certaines valeurs de n on a $r_n = \frac{1}{2}$

☐ **M62** Lorsque n tend vers $+\infty$, la probabilité s_n tend vers :

- ☐ **A** 0 ☐ **B** 1 ☐ **C** $\frac{1}{3}$ ☒ **D** $\frac{1}{4}$ ☐ **E** $\frac{1}{2}$

Partitions d'entiers

Pour des entiers $n \geq 1$ et $k \geq 0$, on note :

- $a(n; k)$ le nombre de listes $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ d'entiers naturels non nuls tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, sous réserve que $k > 0$;
- $b(n; k)$ le nombre de listes $(y_0; y_1; \dots; y_{k+1})$ d'entiers naturels tels que $y_0 + y_1 + \dots + y_k + y_{k+1} = n$ et $y_1, \dots, y_k$ soient tous non nuls (en revanche, y_0 et y_{k+1} peuvent être nuls).

☐ **M63** Parmi les affirmations qui suivent, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

- ☐ **A** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie
- ☒ **B** L'égalité $b(n; k) = a(n + 2; k + 2)$ est toujours vraie
- ☐ **C** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $b(n; k) = a(n + 2; k + 2)$
- ☐ **D** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $b(n; k) = a(n + 2; k + 1)$
- ☐ **E** L'égalité $b(n; k) = a(n + 2; k + 1)$ est toujours vraie

Dans les questions suivantes, on impose $k \geq 1$.

□ **M64** Parmi les affirmations qui suivent, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

☐ **A** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $a(n; k) = \binom{n-1}{k-1}$

☐ **B** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

☐ **C** L'égalité $a(n; k) = \binom{n}{k}$ est toujours vraie

☒ **D** L'égalité $a(n; k) = \binom{n-1}{k-1}$ est toujours vraie

☐ **E** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $a(n; k) = \binom{n}{k}$

□ **M65** On note $B(n; k)$ le nombre d'éléments de Ω_n ayant exactement k blocs. Parmi les affirmations qui suivent, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

☐ **A** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

☐ **B** L'égalité $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k)$ est toujours vraie

☐ **C** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k-1)$

☐ **D** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k)$

☒ **E** L'égalité $B(n; k) = a(n; k) \times b(n; k-1)$ est toujours vraie

□ **M66** Parmi les affirmations suivantes, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

☐ **A** Il existe une infinité d'entiers n pour lesquels il existe un entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $P(X_n = k) = P(X_n = n+1-k)$

☐ **B** Il existe une infinité de couples $(n; k)$ tels que $P(X_n = k) = P(X_n = n+1-k)$

☐ **C** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie

☐ **D** Il existe plusieurs couples $(n; k)$ tels que $P(X_n = k) = P(X_n = n+1-k)$

☒ **E** L'égalité $P(X_n = k) = P(X_n = n+1-k)$ vaut quels que soient n et k

□ **M67** On note E_n l'espérance de la variable aléatoire X_n . Parmi les affirmations suivantes, laquelle est la plus précise parmi celles qui sont vraies ?

☐ **A** Il existe plusieurs entiers n tels que $E_n = \frac{n+1}{2}$

☒ **B** L'égalité $E_n = \frac{n+1}{2}$ vaut quel que soit n

☐ **C** Il existe une infinité d'entiers n tels que $E_n = \frac{n+1}{2}$

☐ **D** Il existe une quantité finie non nulle de valeurs de n pour lesquelles $E_n \neq \frac{n+1}{2}$

☐ **E** Aucune des autres affirmations proposées n'est vraie